Formalisation en Coq d'un cours de géométrie pour le lycée

Frédérique Guilhot[1]

1: Projet Lemme – INRIA
2004 route des lucioles - BP 93
06902 Sophia Antipolis
Frederique.Guilhot@sophia.inria.fr

Résumé

Ce papier décrit l'expérience d'une formalisation en Coq de la géométrie enseignée au lycée. Pour privilégier le raisonnement, l'axiomatique choisie n'utilise pas la méthode analytique. L'accent est aussi porté sur les problèmes de forme : en utilisant l'interface graphique Pcoq et l'outil de construction GeoView, il est possible d'afficher à l'écran des énoncés et des figures dynamiques proches de ceux utilisés au lycée. Nous présentons dans ce papier quelques exemples de preuves puis abordons les difficultés rencontrées dans ce travail.

1. Introduction

L'utilisation des outils logiciels (sur ordinateur ou calculatrice) disponibles actuellement dans les lycées en France, s'avère tout à fait adaptée à de nombreux domaines de l'enseignement des mathématiques, par exemple celui du calcul algébrique et formel et celui des figures du plan et de l'espace. Les expérimentations, les observations sur un grand nombre de calculs, de graphes de fonctions ou de cas de figure permettent de « vérifier empiriquement » différentes propriétés. L'enseignant se doit alors de faire comprendre qu'une propriété qui semble vérifiée même pour un très grand nombre de cas, n'est pas toujours vraie et qu'il faut une démonstration pour la prouver.

Les machines sont maintenant capables de raisonner sur des énoncés logiques du premier ordre, voire d'ordre supérieur. Les assistants à la preuve comme Coq [10] où les preuves sont construites interactivement demandent de la part des utilisateurs des compétences en logique. Il nous semble intéressant d'utiliser de tels logiciels pour enseigner les « savoir-faire » de la démonstration rigoureuse. L'enseignement du raisonnement déductif se faisant essentiellement dans les cours de géométrie, il est donc naturel de penser à utiliser l'outil Coq pour faire des démonstrations interactives de géométrie au lycée.

Si l'on pense pouvoir utiliser un assistant à la preuve pour aider les élèves dans leur apprentissage de la démarche déductive, il nous faut travailler sur la partie interface pour faciliter l'accès à l'outil Coq et avoir des résultats satisfaisants du point de vue de la forme.

Nous verrons dans une première partie (section 2) que l'interface graphique Pcoq [1] apporte des facilités pour les utilisateurs, par exemple en permettant d'obtenir à l'écran des notations mathématiques usuelles. Puis nous nous intéresserons à GeoView [3], outil de construction développé dans notre équipe et intégré à l'interface Pcoq qui permet de générer automatiquement une figure dynamique interactive à partir d'un énoncé de géométrie plane.

Dans la section 3, nous présenterons les grandes lignes de la géométrie affine euclidienne enseignée au lycée en France. Nous aborderons ensuite (section 5) la façon dont nous l'avons formalisée après avoir expliqué l'intérêt de créer une bibliothèque de géométrie spécifiquement dédiée à l'enseignement (section 4). Puis nous nous intéresserons aux parties du cours de lycée formalisées dans cette bibliothèque (section 6) et à quelques exemples significatifs de démonstrations faites en Coq (section 7). Nous expliquerons (section 8) les difficultés rencontrées dans ce travail, en particulier nous aborderons le problème de l'étude des cas dégénérés dans les preuves. Enfin, nous expliquerons le travail qu'il reste à fournir pour pouvoir utiliser cette bibliothèque de géométrie efficacement devant un public a priori non expert.

2. L'interface graphique Pcoq et GeoView

2.1. L'interface graphique Pcoq

Pcoq [1] est une interface graphique pour l'assistant à la preuve Coq qui manipule dynamiquement les objets structurés représentant des commandes ou des formules mathématiques.

Dans Pcoq, les objets manipulés sont affichés en utilisant PPML (*Pretty Printing Meta Language*) qui est un langage pour la description de la présentation des objets structurés. Il permet en particulier :

- d'afficher des formules mathématiques avec des notations très proches de celles utilisées par les mathématiciens,
- de traduire les formules logiques représentant des énoncés mathématiques par des phrases articulées avec des connecteurs logiques (en français ou en anglais).

On trouvera dans les figures 1 et 4 des exemples d'affichages de formules logiques et mathématiques obtenus avec PPML.

Pcoq offre aussi des possibilités d'interaction intéressantes pour un utilisateur novice. Citons la sélection à la souris d'une sous-expression dans une formule mathématique qui permet de la manipuler dynamiquement, de la modifier ou de la copier-coller par exemple. Un autre type d'interaction est le *proof-by-pointing* [4] qui permet en un clic de souris, de construire des commandes complexes envoyées au système de preuve Coq. Ces possibilités font de Pcoq une interface facilement adaptable à l'enseignement, même s'il reste encore du travail à fournir pour qu'elle puisse être utilisée sans un trop long apprentissage par un public non expert.

2.2. GeoView, outil de visualisation des énoncés de géométrie plane

Comment « faire de la géométrie » sans « manipuler de figures » ? Les enseignants utilisent couramment des logiciels de construction de figures dynamiques interactives : Cabri-géométre [5] et Géoplan [8] pour la géométrie plane et Géospace pour la géométrie dans l'espace.

Nous avons développé et intégré à Pcoq un outil appelé GeoView qui permet de générer automatiquement une figure dynamique à partir d'un énoncé de théorème de géométrie plane[1]. Pour développer cet outil, nous avons utilisé le logiciel déjà existant GéoplanJ [7] que nous avons choisi en particulier parce qu'il est disponible sous licence GNU GPL. GéoplanJ a été développé[2] au Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques du CNAM. C'est la version Java de Géoplan qui a été conçue initialement comme une applet pour visionner des figures. Pour obtenir une figure avec GéoplanJ, l'utilisateur peut soit la créer interactivement à la souris et au clavier soit décrire les constructions des objets géométriques dans un texte que l'on appelle « texte de figure ». Nous verrons dans la section 2.2.1 comment à partir d'un énoncé de théorème on obtient un texte de figure.

Les figures générées par GeoView peuvent être facilement utilisées voire modifiées hors de l'environnement de preuve par exemple par des enseignants familiers de Géoplan. Il est en particulier possible d'intégrer ces figures dynamiques interactives dans des pages HTML. On en trouvera un exemple à l'adresse : `http ://www-sop.inria.fr/lemme/Frederique.Guilhot/index.html`.

2.2.1. Description de GeoView

GeoView décrit en détail dans [3], permet de construire une figure dynamique interactive à partir d'un énoncé de théorème. Nous donnons ici une brève description de son fonctionnement.

[1] Ce travail a été réalisé en collaboration avec Loïc Pottier.

[2] Frédéric Kotecki, professeur de mathématiques, est l'auteur de GéoplanJ.

- L'énoncé du théorème donné en entrée est transformé en un arbre du type :
  $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow ... \rightarrow H_n \rightarrow C$ où les H_i peuvent être interprétées comme les hypothèses du théorème et C comme sa conclusion.
- On distingue alors parmi les contraintes géométriques de cet arbre celles qui sont *liantes* de celles qui ne le sont pas. Par exemple, la contrainte *(triangle A B C)* n'est pas liante : 3 points libres dans le plan conviennent pour la construction ; en revanche la contrainte *(alignes A B C)* est liante. Les contraintes apparaissant dans la conclusion sont redondantes pour la construction de la figure donc sont non liantes. Dans les figures 1 et 2, on trouve l'énoncé du théorème de la droite de Simson et la liste associée de ses contraintes. On remarque que chaque hypothèse exprimant qu'un point est le projeté orthogonal d'un autre sur une droite est représentée par 2 contraintes : une contrainte d'alignement de 3 points et une contrainte d'orthogonalité de 2 droites. De sorte qu'on a la propriété suivante : pour chacun des points figurant dans une contrainte liante, on est capable de décrire une construction du point choisi à partir des autres points figurant dans la contrainte.

Théorème **droite_Simson :**
Soient A, B, C, M, P, Q et R des points.
Si **ABC est un triangle,**
P est le projeté orthogonal de M sur la droite (BC),
Q est le projeté orthogonal de M sur la droite (AC),
R est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB),
et M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC
alors **P, Q et R sont alignés.**

FIG. 1 – Enoncé du théorème de la droite de Simson avec Pcoq

```
Liste de toutes les contraintes
non liante :triangle ( A, B, C )
liante :perpendiculaire ( B, C, M, P )
liante :aligne ( B, C, P )
liante :perpendiculaire ( A, C, M, Q )
liante :aligne ( A, C, Q )
liante :perpendiculaire ( A, B, M, R )
liante :aligne ( A, B, R )
liante :cocyclique ( A, B, C, M )
non liante :aligne ( P, Q, R )

Il y a 7 points a gerer dans les contraintes liantes
[R, Q, A, P, M, C, B]

Construction de la matrice des contraintes

 R Q A P M C B
 . . . X O O O
 . . . X . O O
 . X O . O O .
 . X O . . O .
 X . O . O . O
 X . O . . . O
 . . X . O O O
```

FIG. 2 – Matrice des contraintes calculée par GeoView

- On fait la liste de toutes les contraintes *liantes* et des points apparaissant dans ces contraintes. On obtient une matrice de contraintes : chaque ligne représentant une contrainte liante, chaque colonne correspondant à un point.
- On cherche une matrice vérifiant les trois critères suivants :
  - dans chaque ligne un seul des points apparaissant dans la contrainte est *lié* aux autres (le point lié est celui qui sera construit à partir des autres points figurant dans la contrainte),
  - dans une colonne, un point ne peut être *lié* plus de 2 fois,
  - il n'y a pas de boucle : par exemple, un couple de points *libre/lié* dans une ligne n'apparait pas *lié/libre* dans une autre.

  La matrice est initialisée avec les points liés placés le plus à gauche. La matrice de la figure 2 où les points liés sont représentés par des croix, est correcte : il n'y a pas de boucle et les points sont liés au plus deux fois. Au cas où la première matrice ne vérifie pas les 3 critères, il suffit alors de tester toutes les matrices possibles obtenues en déplaçant les points liés.

- Lorsqu'on trouve une matrice correcte, dans chaque ligne la position du point *lié* est calculée et il en résulte une construction. Dans l'exemple ci-dessus, les points B, C et M, n'étant liés dans aucune ligne de la matrice, sont les points libres de la figure et pourront être déplacés à la souris. Le point P est le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par M avec la droite (BC), une construction analogue est faite pour les points Q et R. Enfin, le point A est un point libre sur le cercle circonscrit au triangle BCM.
- A la fin de l'analyse de la matrice de contraintes un « texte de figure » est envoyé à GéoplanJ qui génère une figure à l'écran. Dans la figure suivante, les points libres B, C et M apparaissent en vert et la conclusion du théorème en rouge, ici la droite passant par P, Q et R qui représente la droite de Simson.

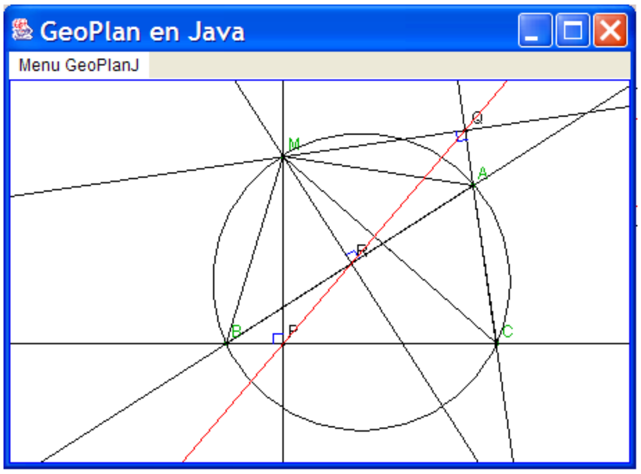

FIG. 3 – Figure générée par GeoView à partir de l'énoncé du théorème de la droite de Simson

3. La géométrie enseignée au lycée

Dans toute la suite, il est question de la partie des programmes de mathématiques concernant la géométrie affine euclidienne en dimension 2 et 3, actuellement en vigueur en France. Comme nous voulons privilégier le raisonnement, nous ne parlons pas ici de la partie de géométrie analytique.

La notion d'axiome n'est pas abordée explicitement dans l'enseignement secondaire. On utilise implicitement les axiomes d'Euclide, par exemple on voit des énoncés commençant par : *« soient A, B et C trois points non alignés, le plan (ABC) ... »*, ce qui sous-entend que par 3 points non alignés passe un plan et un seul.

Les structures algébriques ne sont plus au programme des lycées, aussi ne parle-t-on jamais d'espace vectoriel ni d'espace affine. En revanche, les élèves doivent connaître les « règles de calcul » sur les vecteurs (dimension 2 ou 3). Le calcul barycentrique n'est pas au programme mais la notion de barycentre est abordée avec ses propriétés.

Pour la géométrie euclidienne, les élèves utilisent le produit scalaire et la distance euclidienne associée. Quelques éléments d'orientation du plan et de l'espace sont abordés et les angles orientés de vecteurs non nuls du plan sont définis et utilisés dans des calculs.

Parmi les méthodes de démonstration, une grande place est faite à l'utilisation des transformations géométriques : translations, homothéties, rotations planes, symétries planes, similitudes directes et les théorèmes qui caractérisent leurs composées sont démontrés.

Enfin, l'étude des nombres complexes et de leurs applications à la géométrie plane est traitée en terminale.

4. Le choix de l'axiomatique

4.1. Objectifs

Pour formaliser la géométrie en Coq, plusieurs choix sont possibles. Une partie de la géométrie analytique plane a déjà été formalisée et intégrée à la bibliothèque standard `Reals`.

Pour ce qui concerne la géométrie qui manipule directement les objets géométriques sans recours à la méthode analytique, il existe plusieurs axiomatiques possibles, citons celles de Hilbert, Tarski et Von Plato (géométrie constructive) qui ont été formalisées en Coq par Julien Narboux, dans le cadre de son travail de thèse (en cours), parallélement à notre expérience.

D'autre part, les méthodes de Wu utilisant les bases de Gröbner et de Chou présentées dans [6] permettent de démontrer automatiquement et très efficacement de grandes classes de théorèmes et peuvent aussi être formalisées en Coq.

Mais notre but n'est ni d'avoir un nombre minimal d'axiomes ni un outil automatique de preuves mais de « coller au plus près » des définitions, théorèmes et démonstrations donnés au lycée. L'objectif de pouvoir expliquer les raisonnements « comme au lycée » constitue une contrainte forte pour la formalisation choisie. Dans notre bibliothèque, l'idéal aurait été de n'employer que les « objets géométriques manipulés au lycée » décrits dans la section 3 (points, droites, plans, vecteurs, barycentre etc...). Si ce n'est pas le cas pour tous les objets primitifs, très vite les lemmes n'emploient plus que de tels objets.

4.2. Sommes vectorielles de Leibniz et espace universel associé à un espace affine

Nous voulons essentiellement trouver un modèle mathématique dans lequel on peut contruire des objets géométriques à partir des *points* du plan ou de l'espace et calculer en utilisant les *vecteurs* sans tenir compte de la dimension.

La notion de barycentre permet à partir de plusieurs points d'en construire de nouveaux. Les justifications données au lycée reposent sur l'étude des sommes vectorielles de Leibniz que nous rappelons ci-dessous :

Soient A et B deux points, étant donnés a et b deux réels, on étudie l'application $f_{a,b}$ qui associe à un point M du plan ou de l'espace un vecteur :

$$f_{a,b} : M \mapsto \overrightarrow{f_{a,b}(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} \tag{1}$$

– *si $a+b=0$, $f_{a,b}$ est constante car :*

$$\forall M,\ a\overrightarrow{MA} - a\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{BA} \tag{2}$$

– *si $a+b \neq 0$, on montre qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{f_{a,b}(G)} = \overrightarrow{O}$ qu'on appelle le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) et on démontre :*

$$\forall M,\ a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG} \tag{3}$$

On peut définir par analogie avec les sommes vectorielles de Leibniz, la somme de deux points pondérés (pas au programme des lycées) :

Soient A et B deux points, étant donnés a et b deux réels, on définit la somme $aA+bB$ de sorte que les formules (4) et (5) qui suivent peuvent être « interprétées » respectivement par les formules (2) et (3).

– *si $a+b=0$,*

$$aA - aB = a\overrightarrow{BA} \tag{4}$$

– *si $a+b \neq 0$ et G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b)*

$$aA + bB = (a+b)G \tag{5}$$

Cette présentation peut être rapprochée de la notion d'espace universel associé à un espace affine décrite dans le chapitre « Un espace universel. Applications » du livre de Marcel Berger [2].

Etant donné A un espace affine sur $\mathbb{R}$ et E son espace vectoriel sous-jacent, on considère la réunion disjointe de E et du produit cartésien $\mathbb{R}^* \times A$. On munit cet ensemble des deux lois qui prolongent celles de E (on retrouve les définitions 4 et 5 du paragraphe précédent), ce qui lui donne une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle l'espace universel associé à A. On peut ainsi plonger E et A dans cet espace (A étant identifié à $1 \times A$).

C'est cet ensemble que nous avons formalisé en Coq, il contient les vecteurs et ce que nous appelons « les points pondérés » et est muni d'une structure d'espace vectoriel. De plus, on n'a pas à se préoccuper de dimension : on peut formaliser aussi bien la géométrie spaciale que la géométrie plane.

5. Formalisation en Coq

5.1. Objets primitifs

Les objets primitifs sont les points, les points pondérés et les vecteurs, de sorte que le calcul barycentrique et vectoriel puisse être interprété en dimension quelconque (ici 2 ou 3).

Nous utilisons les types `PO` et `PP` qui représentent respectivement l'ensemble des points et l'ensemble des points pondérés et vecteurs (éléments de l'espace universel). Nous définissons ensuite l'addition : `add_PP` et le produit externe : `mult_PP` ; enfin un constructeur de points pondérés : `cons`.

```
Variables PO : Type.
Variables PP : Type.
Variables add_PP : PP -> PP -> PP.
Variables mult_PP : R -> PP -> PP.
Variables cons : R -> PO -> PP.
```

On peut ensuite définir un constructeur de vecteurs à partir des points : $\overrightarrow{AB} := 1.B - 1.A$

```
Definition vec := [A, B : PO] (add_PP (cons (Ropp R1) A) (cons R1 B)).
```

On donne ensuite une collection d'axiomes pour formaliser les propriétés algébriques de l'espace vectoriel représenté par `PP`.

5.2. Formalisation des autres objets géométriques

Les objets primitifs : points, points pondérés et vecteurs étant définis, il faut formaliser les notions d'alignement, de parallélisme, de coplanarité etc... indispensables pour faire de la géométrie affine en dimension 2 et 3.

La plupart des définitions des objets géométriques utilisés au lycée sont données sous la forme : *« on dit que ... si et seulement si ... »*. La notion d'équivalence étant assez floue pour les lycéens, il nous a paru plus simple pour l'utilisateur « novice » de définir nos objets en Coq comme des variables d'un type donné et de donner des axiomes pour chaque implication.

Pour illustrer ce qui précède, prenons l'exemple de la notion de parallélisme de droites (cf figure 4). On définit un type *DR* (ensemble des droites), puis un constructeur de droites à partir de deux points (*droite*) ; enfin une fonction *paralleles* de type : $DR \to DR \to Prop$ et deux axiomes *def_paralleles* et *def_paralleles2* qui utilisent les égalités de points pondérés. Les lemmes *paralleles_vecteur* et *colineaires_paralleles* donnent une interprétation des deux axiomes précédents avec des égalités de vecteurs. On pourra remarquer les hypothèses $A \neq B$ et $C \neq D$ qui assurent l'existence des droites (AB) et (CD).

Dans l'exemple ci-dessus, il serait inutile, voire antipédagogique, de montrer à des élèves tout ce qui apparait dans la figure 4, on pourrait ne montrer par exemple que les deux derniers lemmes qui suffisent pour la compréhension et les démonstrations élémentaires faites au lycée. Pour assurer la compréhension de ces lemmes, nous avons utilisé les possibilités d'affichage de l'interface Pcoq. Aux formules logiques des énoncés sont attachées des phrases dans lesquelles les hypothèses et la conclusion sont mis en relief par les articulations logiques *« si ... alors ... »* et l'utilisation de couleurs, comme l'illustre la figure 5.

Variables **DR** : **Type.**

Variables **droite** : **PO => PO => DR.**

Variables **paralleles** : **DR => DR => Prop.**

Axiom

def_paralleles : $\forall$A, B, C, D : PO. $\forall$k : R. A $\neq$ B =>
C $\neq$ D =>
(1, B) + (-1, A) = (k, D) + (-k, C) => (AB) // (CD).

Axiom

def_paralleles2 : $\forall$A, B, C, D : PO. A $\neq$ B =>
C $\neq$ D =>
(AB) // (CD) => $\exists$k : R. (1, B) + (-1, A) = (k, D) + (-k, C).

Lemma **paralleles_vecteur**: $\forall$A, B, C, D : PO. A $\neq$ B =>
C $\neq$ D => (AB) // (CD) => $\exists$k : R. $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.

Lemma **colineaires_paralleles**:
$\forall$k : R. $\forall$A, B, C, D : PO. A $\neq$ B => C $\neq$ D => $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$ => (AB) // (CD).

Fig. 4 – Formalisation de la notion de parallélisme de 2 droites (Pcoq)

Propriété **paralleles_vecteur**:
Soient A, B, C et D des points.
Si **A est distinct de B,**
C est distinct de D,
et les droites (AB) et (CD) sont parallèles
alors **il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.**
...
Propriété **colineaires_paralleles**:
Soit k un réel.
Soient A, B, C et D des points.
Si **A est distinct de B,**
C est distinct de D,
et $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$
alors **les droites (AB) et (CD) sont parallèles.**

Fig. 5 – Lemmes tels qu'ils peuvent être montrés à des élèves de lycée (Pcoq)

6. Parties du cours de lycée formalisées

6.1. Vue d'ensemble du développement en Coq

Ce développement n'a pas la prétention d'exhaustivité, mais propose une collection de chapitres couvrant une large partie du programme du lycée. Dans la figure 6, on trouve le graphe de dépendance des grandes parties de ce développement.

- Dans la partie *géométrie affine (dimension 2 et 3)*, sont formalisés les points, vecteurs, barycentres et les notions de parallélisme et concours de droites. Les théorèmes de Thalès et Desargues sont démontrés.
- Dans la partie *géométrie affine dans l'espace*, ont été démontrés les théorèmes classiques de cours concernant les propriétés d'incidence et de parallélisme de plusieurs droites et plans de l'espace.

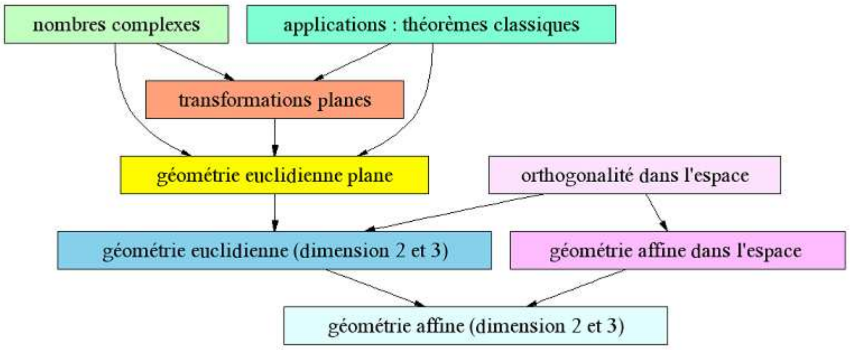

FIG. 6 – Graphe de dépendance des grandes sections du développement

- Dans la partie *géométrie euclidienne (dimension 2 et 3)*, sont formalisés le produit scalaire et la distance euclidienne. Sont définies ensuite les notions d'orthogonalité de vecteurs et de droites et la projection orthogonale sur une droite.
- Dans la partie *orthogonalité dans l'espace*, est formalisée la notion de droite et plan orthogonaux. Un exercice donné au baccalauréat S est traité comme application.
- Dans la partie *géométrie euclidienne plane*, sont traités les problèmes classiques de la « géométrie des configurations planes ». Les théorèmes de Pythagore et de la médiane y sont démontrés. Les angles orientés et la trigonométrie sont formalisés ainsi que la notion d'aire signée. Les relations métriques dans le triangle sont démontrées avec les théorèmes d'Al-Kashi et le théorème des sinus. On trouve aussi une partie de géométrie analytique concernant les équations de droites et de cercles dans le plan.
- Dans la partie *transformations planes*, sont étudiées les translations, homothéties, rotations, symétries axiales et les composées de ces transformations.
- Dans la partie *applications*, sont démontrés des théorèmes classiques : théorème de Miquel, des symétriques de l'orthocentre, de la droite de Simson, de la droite d'Euler et du cercle des neuf points. La notion de puissance d'un point par rapport à un cercle et l'étude de l'inversion géométrique ont aussi été formalisés.
- Dans la partie *nombres complexes*, sont démontrées les propriétés algébriques du corps des nombres complexes. La caractérisation géométrique des transformations d'écriture complexe : $z \mapsto az + b$ a été formalisée.

7. Quelques exemples de théorèmes et démonstrations

Il s'agit dans cette section de donner un échantillon d'exemples de techniques de preuves très différentes les unes des autres, qui utilisent des lemmes démontrés dans les différents « chapitres » décrits précédemment. Toutes les démonstrations faites en Coq sont « inspirées » de celles faites au lycée.

Du point de vue de la forme, si nous sommes capables de montrer à l'écran des énoncés et des figures « satisfaisants », il n'est pas imaginable pour expliquer une démonstration, de donner à lire le script d'une preuve Coq. Cependant, le lecteur intéréssé trouvera les sources de Coq à l'adresse suivante : `ftp ://ftp-sop.inria.fr/lemme/Frederique.Guilhot/geometrie.tar.gz`. Nous nous contentons dans cette section de décrire nos preuves de façon informelle.

7.1. Un exemple de théorème de géométrie affine dans l'espace

Dans ce théorème dit du « toit », il s'agit de montrer que deux plans sécants contenant deux droites parallèles se coupent suivant une droite parallèle aux deux premières. La figure 7 donne l'énoncé en Coq de ce théorème et une figure réalisée avec GéospaceW. On remarque que pour définir une droite, on utilise deux points distincts et pour définir un plan, on utilise 3 points non alignés.

Théorème **toit**:
Soient A, B, C, D, E et F des points.
Si **A, B et C ne sont pas alignés,**
D, E et F ne sont pas alignés,
A est distinct de B,
D est distinct de E,
les droites (DE) et (AB) sont parallèles,
et les plans (ABC) et (DEF) ne sont pas parallèles
alors
il existe
un point I et
un point J tels que :
I est distinct de J et les droites (AB) et (IJ) sont parallèles et
la droite (IJ) est incluse dans le plan (ABC) et la droite (IJ) est incluse dans le plan (DEF).

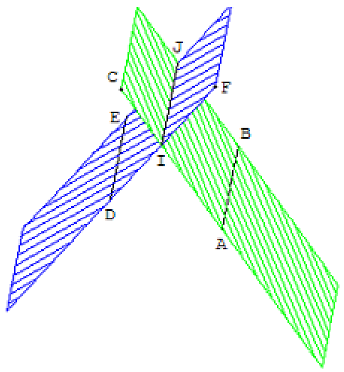

FIG. 7 – Théorème du toit : énoncé (Pcoq) et figure correspondante (GéospaceW)

La preuve faite en Coq « suit » la démonstration classique qui utilise un raisonnement par l'absurde, comme souvent dans les démonstrations de géométrie dans l'espace où on s'intéresse aux posititions relatives de deux objets (deux plans, deux droites ou un plan et une droite). Ici, les étapes de la démonstration sont les suivantes :

- *on s'intéresse aux positions relatives de la droite* (DF) *et du plan* (ABC)*, on a 2 cas : soit* (DF) *et* (ABC) *sont parallèles soit ils se coupent.*
- *supposons que* (DF) *et* (ABC) *soient parallèles* (1)
  comme les droites (DE) *et* (AB) *sont parallèles,*
  la droite (DE) *et le plan* (ABC) *sont parallèles* (2)
  les points D*,* E *et* F *n'étant pas alignés, les droites* (DE) *et* (DF) *sont sécantes* (3)
  en utilisant (1), (2) *et* (3)*, on en déduit que les plans* (ABC) *et* (DEF) *sont parallèles,*
  ce qui est contradictoire.
- *on a donc montré que la droite* (DF) *et le plan* (ABC) *se coupent,*
  on appelle I *leur point d'intersection,*
  on a $I \in (DEF)$ *car* $I \in (DF)$
  donc I *est un point de la droite d'intersection des plans* (ABC) *et* (DEF) (4)
  on construit le point J *tel que* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$*,*
  on a $(IJ)//(AB)$ (5) *car* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$*,*
  donc $(IJ)//(DE)$ (6) *par transitivité du parallélisme,*
  on a $J \in (ABC)$ (7) *car* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ *et* $I \in (ABC)$
  et $J \in (DEF)$ (8) *car* $I \in (DEF)$ *et* $(IJ)//(DE)$*,*
  on a $I \neq J$ (9) *car* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ *et* $A \neq B$
  en utilisant (4), (7), (8) *et* (9) *, on en déduit que*
  (IJ) *est la droite d'intersection des plans* (ABC) *et* (DEF)*.*

7.2. Théorème du cercle des neuf points

Ce théorème est un grand classique de la géométrie euclidienne plane, Euler et Feuerbach ont démontré que dans un triangle ABC, le cercle circonscrit aux milieux des côtés A', B' et C' passent aussi par le pied des 3 hauteurs du triangle ABC et par les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$ où H désigne l'orthocentre du triangle ABC. De plus, ce cercle a pour centre le milieu I du segment $[OH]$, où O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La figure 8 donne l'énoncé en Coq de ce théorème et la figure générée par GeoView.

Théorème cercle_neuf_points :
Soient A, B, C, A', B', C', O, G, H, I, J, K, L, H1, H2 et H3 des points.
Si ABC est un triangle,
A' est le milieu du segment [BC],
B' est le milieu du segment [AC],
C' est le milieu du segment [AB],
G est le centre de gravité du triangle ABC,
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC,
H est l'orthocentre du triangle ABC,
I est le milieu du segment [OH],
J est le milieu du segment [AH],
K est le milieu du segment [BH],
L est le milieu du segment [CH],
H1 est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC),
H2 est le projeté orthogonal de B sur la droite (CA),
et H3 est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
alors
J appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
H1 appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
K appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
H2 appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
L appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
H3 appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

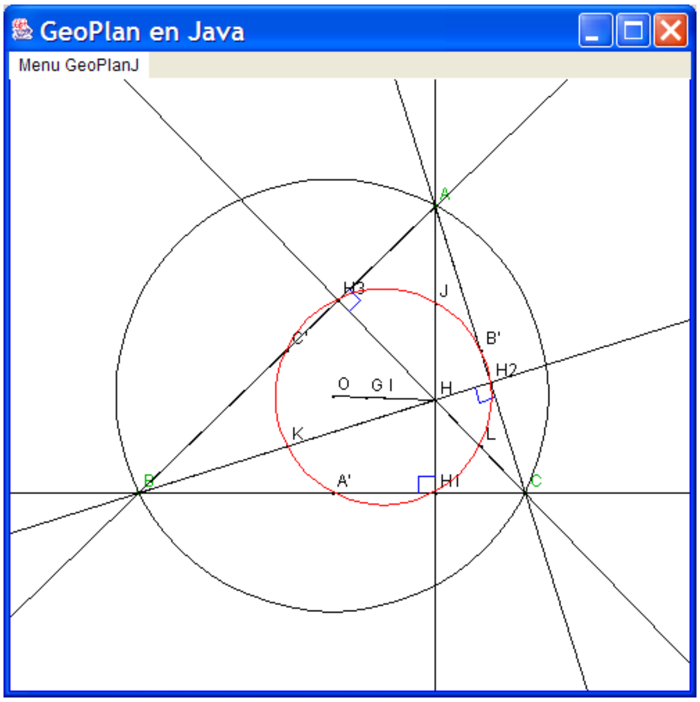

FIG. 8 – Le cercle des neufs points : énoncé avec Pcoq et figure générée par GeoView.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le résultat : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, où G désigne le centre de gravité du triangle ABC. La droite (OG) s'appelle d'ailleurs la droite d'Euler. La démonstration assez longue (environ 400 lignes) du théorème du cercle des neuf points est intéressante dans le sens où elle fait appel à des théorèmes de « chapitres » très divers de la bibliothèque :

- calcul vectoriel,
- utilisation des propriétés des barycentres, en particulier celles du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle,
- traduction en termes d'homothéties d'égalités vectorielles,
- utilisation des propriétés des homothéties et symétries centrales,
- calcul de produits scalaires et traduction en termes d'orthogonalité,
- propiétés des médiatrices et des hauteurs d'un triangle,
- utilisation des angles orientés.

7.3. Utilisation des nombres complexes pour l'étude des configurations

Pour résoudre des exercices sur les configurations dans le plan, une méthode consiste à utiliser un repère orthonormé direct arbitraire et les affixes des points de la figure dans ce repère. On travaille alors avec les nombres complexes en traduisant les termes de l'énoncé en contraintes sur les affixes des points.

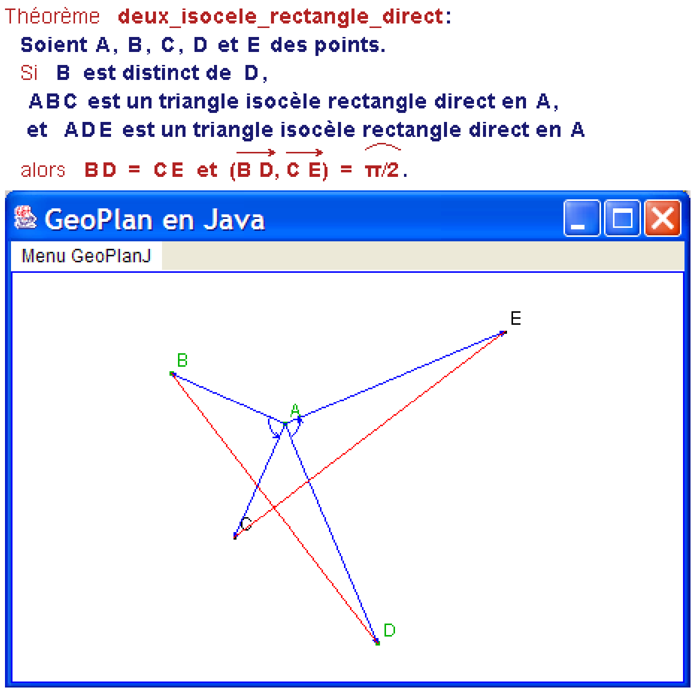

FIG. 9 – Enoncé d'un exercice et figure générée par GeoView

Prenons l'exemple de cet exercice : étant donnés deux triangles isocèles rectangles directs ABC et ADE tels que $B \neq D$, il s'agit de démontrer qu'alors les droites (BD) et (CE) sont orthogonales et qu'on a l'égalité des longueurs : $BD = CE$. La figure 9 donne l'énoncé en Coq de cet exercice et la figure générée par GeoView.

La preuve qui a été faite en Coq « suit » les étapes suivantes :

- *on considère les affixes respectives a, b, c, d et e des points A, B, C, D et E, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct arbitraire,*

- *on traduit les hypothèses ABC et ADE triangles isocèles rectangles directs, en utilisant l'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *par :*
  $c - a = i(b - a)$ *et* $e - a = i(d - a)$,
- *en soustrayant membre à membre, on obtient* $e - c = i(d - b)$, *ce qui donne :*
  $\frac{e-c}{d-b} = i$ *car* $d \neq b$
- *en passant aux modules et aux arguments on obtient :*
  $|\frac{e-c}{d-b}| = |i| = 1$ *et* $\arg(\frac{e-c}{d-b}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.
- *ce qui s'interprète géométriquement en termes d'égalité de longueurs et d'angles par :*
  $CE = BD$ *et* $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{2}$

Bien entendu, la méthode de démonstration qui consiste à utiliser les propriétés de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est aussi possible avec notre développement.

8. Difficultés rencontrées

8.1. Représentation des droites

Dans l'axiomatisation choisie, les objets primitifs sont les points et les vecteurs. Définir une droite revient à se donner deux points distincts, le nombre de choix des 2 points étant infini, la manipulation des droites n'est pas facilitée. Listons quelques problèmes rencontrés :

- si dans une preuve on veut par exemple remplacer la droite (AB) par la droite (CD), il faut d'abord montrer que $C \neq D$, puis que les points A, B et C sont alignés et enfin que les points A, B et D sont alignés.
- l'application de lemmes concluant sur l'alignement de 3 points peut engendrer à son tour des buts du type « points distincts » et/ou « alignement de 3 points ».
- suivant le contexte, montrer l'alignement de 3 points est plus ou moins facile : on peut avoir à faire du calcul vectoriel (contexte purement affine), ou avoir à montrer par exemple qu'un angle de droites est nul (contexte euclidien), ce qui peut être difficile.
- pour les mêmes raisons, montrer le non-alignement de 3 points n'est pas toujours élémentaire.
- si dans une preuve on veut par exemple montrer que 2 droites (AB) et (CD) sont parallèles (ou sécantes), il faut faire une étude par cas : soit les 4 points A, B, C et D sont *en position générale* i.e. il n'existe pas de triplets de points alignés, soit on est dans un *cas dégénéré* i.e. des points sont confondus ou alignés.

On comprend que les démonstrations faites en Coq deviennent rapidement très lourdes, dès qu'il y a un nombre important de points et de droites dans les configurations étudiées.

8.2. Etude des cas dégénérés des configurations

Or, les difficultés soulevées dans le paragraphe précédent sont, dans les démonstrations faites au lycée, passées sous silence parce qu'on considère soit que des propriétés sont « évidentes » au niveau de maitrîse où l'on se trouve, soit que l'étude des cas dégénérés n'a pas d'intérêt, toute l'attention étant portée sur l'étude des cas génériques.

Prenons un exemple pour illustrer ce qui précéde. Pour démontrer que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes, il y a 2 choses à montrer. La première qui dit que si un point appartient à deux hauteurs, alors il appartient aussi à la troisième, la deuxième assure l'existence d'un tel point c'est-à-dire que 2 hauteurs sont en position d'être sécantes. On trouve rarement dans la littérature d'explicitation de cette deuxième partie qui est souvent implicitement présupposée et seule la première partie est expliquée. En Coq on a traité les 2 parties, la première, facile, se fait avec des calculs de produits scalaires, la deuxième, plus difficile, utilise des arguments d'angles pour démontrer que les hauteurs ne peuvent être parallèles dans le cas où les sommets du triangle ne sont pas alignés.

Nous avons démontré de nombreux théorèmes où le nombre de points et de droites dans la configuration étudiée est important. L'étude du *cas générique* (cas le plus intéressant) peut alors ne représenter qu'une part mineure de la preuve entière (un quart à un tiers pour certaines preuves).

8.3. Automatisation et utilisation de tactiques

L'utilisation d'un assistant à la preuve comme Coq doit permettre à un élève de construire et d'organiser son raisonnement. Il est important dans une démonstration de dégager les arguments « essentiels » de ceux qui peuvent être considérés comme « évidents » à son niveau. Le niveau de détail qu'exige le système Coq n'est pas adapté à cet objectif. Pour pallier ce défaut, il faut tendre vers l'automatisation de certaines tâches : en particulier l'application de lemmes triviaux et les réécritures triviales.

Pour automatiser certaines parties de nos preuves, nous avons utilisé une base de données de tactiques utilisée par *Auto* dans lesquels figurent beaucoup d'application de lemmes concluant sur l'alignement ou le non-alignement de 3 points et la distinction de 2 points. Mais en pratique, il reste encore du travail pour résoudre automatiquement tous les problèmes posés par les cas dégénérés exposés dans le paragraphe précédent.

Pour automatiser des petites parties de preuves, nous avons utilisé le langage des tactiques Ltac de la version V7 de Coq. En ce qui concernent les réécritures, nous avons utilisé des « tactiques utilisateur » : *Ringvec* et *Fieldvec* qui simplifient le calcul vectoriel en utilisant les tactiques *Ring* et *Field*. La tactique *discrimine* est utilisée pour régler automatiquement (en utilisant la réécriture) les cas de points confondus. D'autres tactiques ont été utilisées pour prouver des égalités triviales de produit scalaire ou démontrer que des vecteurs sont orthogonaux : *Simplscal* et *Simplortho*. D'autres enfin permettent de montrer des égalités d'angles orientés en utilisant des égalités de leurs mesures dans $\mathbb{R}$.

Il n'est pas toujours aisé avec Coq de prouver des buts concluant sur une négation. Une tactique *contrapose* permet de faire des raisonnements par contraposition. D'autre part, des prédicats comme *triangle*, permettent de remplacer des conjonctions de négations.

```
Definition triangle : PO -> PO -> PO ->  Prop :=
[A, B, C : PO]  ~(< PO > A == B ) /\ ~(alignes A B C).
```

D'autres « tactiques utilisateur » permettent aussi d'ajouter automatiquement dans le contexte, des hypothèses qui assurent que deux points sont distincts ou que trois points sont non alignés. Prenons l'exemple de la preuve de l'existence du centre du cercle circonscrit à un triangle. Classiquement, on montre son existence en utilisant le fait que les 3 médiatrices de ce triangle sont sécantes. Dans la figure 10, nous trouvons l'énoncé du théorème et le début de sa preuve : il s'agit au début de la démonstration, de construire les médiatrices des segments $[AB]$ et$[BC]$.

```
Theorem  existence_cercle_circonscrit:
 ∀A, B, C : PO. (triangle A B C) => ∃O : PO . (circonscrit O A B C).
- Intros.
- (deroule_triangle A B C).
- (soit_mediatrice A B M K).
- (soit_mediatrice B C J L).
```

FIG. 10 –
Un théorème et le début de sa preuve utilisant des « tactiques utilisateur »

Les tactiques *deroule_ triangle* et *soit_ médiatrice* qui apparaissent dans la preuve permettent d'ajouter des hypothèses. En particulier on sait que les points A, B et C ne sont pas alignés et que $A \neq B$ après l'éxécution de *(deroule_ triangle ABC)*, puis après l'éxécution de *(soit_ médiatrice ABMK)*, on a construit le milieu M du segment $[AB]$ et K un autre point de la médiatrice du segment $[AB]$ et on sait que M et K sont distincts, et sont aussi distincts des extrémités du segment comme l'illustre la figure 11. Quand on avance dans la preuve la tactique *Try Trivial* permet ainsi de prouver automatiquement des buts.

Intros	*(deroule_triangle A B C)*	*(soit_mediatrice A B M K)*
		H10 : K ≠ B
		H4 : K ≠ A
		H9 : M = (milieu A B)
		H8 : (mediatrice A B K)
		H7 : M ≠ K
		K : PO
		H6 : B ≠ M
		H5 : A ≠ M
		M : PO
	H3 : B ≠ C	H3 : B ≠ C
	H2 : A ≠ C	H2 : A ≠ C
	H1 : ¬ (alignes A B C)	H1 : ¬ (alignes A B C)
	H0 : A ≠ B	H0 : A ≠ B
H : (triangle A B C)	H : (triangle A B C)	H : (triangle A B C)
C : PO	C : PO	C : PO
B : PO	B : PO	B : PO
A : PO	A : PO	A : PO

Fig. 11 – Enrichissement successif du contexte de preuve par l'utilisation de tactiques

9. Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce papier montre qu'il a été possible de développer une bibliothèque de géométrie en Coq dédiée à l'enseignement au lycée. Nous avons montré que tant sur les questions de fond avec les techniques variées de démonstrations offertes illustrées par quelques exemples dans la section 7, que sur les questions de forme avec les possibilités offertes par l'interface graphique Pcoq et l'outil de visualisation GeoView, nous pouvions nous « approcher » de la démarche « naturelle » et proposer un outil adapté à l'enseignement. Mais beaucoup de travail reste à faire avant de pouvoir mettre cet outil entre les mains d'utilisateurs non experts de Coq.

Sur le fond, les difficultés soulevées dans la section 8 sur la représentation des droites et l'étude des cas dégénérés ne sont pas toutes réglées par l'automatisation et l'utilisation des « tactiques utilisateur ». Plusieurs voies sont possibles à envisager :

- remettre tout à plat à partir de la formalisation des droites et de l'alignement de points et proposer une représentation où les objets *droites* seraient manipulés et auraient des propriétés en tant que tels. Il semble alors qu'outre le fait que cela représenterait un gros travail, ce changement de point de vue aurait pour effet de régler certains problèmes, mais pourraient engendrer de nouvelles difficultés par exemple avec les propriétés héritées des points appartenant à ces droites.
- proposer une version « simplifiée » des théorèmes de la bibliothèque mis à la disposition des élèves où les prémisses concernant les points distincts ou non alignés ne figureraient plus, les points étant considérés a priori *en position générale*. Cette solution radicale permettrait de se débarrasser de l'étude des cas dégénérés. Le risque serait alors de voir un élève démontrer avec cet outil un résultat notoirement faux, ce qui aurait un effet désastreux.
- une solution moins radicale serait de garder cette bibliothèque telle quelle et de créer artificiellement une « hiérarchie » dans les buts à prouver. On pourrait imaginer un système qui reconnaisse les buts « inintéressants » et qui les prouvent de manière brutale. Ceci pourrait se faire en utilisant par exemple la « tactique utilisateur » suivante :

```
Axiom facile : (P : Prop) P.
Tactic Definition but_facile :=
Match Context With
| [|- ~ (alignes ? ? ?)] -> Apply facile
| [|- ~ (eqT PO ? ?)] -> Apply facile
| _ -> Idtac.
```

  De même que pour la solution précédente, il y a un risque de prouver un résultat faux avec un tel outil.

- une autre possibilité (sans doute la meilleure) est de reprendre l'idée de reconnaître les buts « inintéressants » et de les prouver de façon plus élégante en utilisant une autre formalisation des mêmes objets géométriques dans laquelle les preuves sont automatiques (en utilisant la méthode de Shang-Ching Chou [6] par exemple).

Du point de vue de la forme, si nous pouvons exhiber des énoncés et des figures dynamiques « proches de ceux du lycée », il y a encore un travail à faire sur les scripts de preuve qui sont illisibles par un public non averti.

- un travail en cours de développement permettra d'intégrer à Pcoq un outil de génération automatique d'explications en langage naturel à partir d'un script de preuve. Ceci permettra de pouvoir « lire » une preuve déjà écrite sous forme d'un texte structuré en langue naturelle.
- nous envisageons aussi de fournir un autre outil de visualisation des preuves : le schéma de démonstration, graphe orienté acyclique dans lequel chaque pas de déduction est représenté par un sous-graphe.
- il reste à fournir une boite à outils qui permette d'écrire les preuves « naturellement », sans utiliser les tactiques basiques de Coq qui demandent un long apprentissage, en particulier pour le raisonnement en arrière. Laurent Théry propose dans [9] un nouveau « format » pour écrire des preuves formelles dans le style des « démonstrations sur papier », à chaque pas de la preuve ainsi écrite correspond un lemme à prouver par le système. On peut aussi imaginer des « tactiques utilisateur » qui permettent le raisonnement en avant, l'utilisateur fournissant les hypothèses qu'il veut utiliser et les faits qu'il veut en déduire, le système vérifiant que cette opération est valide.

Remerciements

Je tiens à remercier Laurence Rideau qui m'a soutenue dans la rédaction de cet article grâce à ses remarques constructives.

Références

[1] A. Amerkad, Y. Bertot, L. Pottier et L. Rideau. *Mathematics and Proof Presentation in Pcoq.* Actes du Colloque « Proof Transformation and Presentation and Proof Complexities » satellite de IJCAR 2001, Sienne, Italie, Juin 2001.

[2] M. Berger. *Géométrie 1 : action de groupes, espaces affines et projectifs*, chapitre « Un espace universel. Applications », pages 93–111. Cedic/Nathan, 1977.

[3] Y. Bertot, F. Guilhot et L. Pottier. *Visualizing Geometrical Statements with GeoView.* Actes du Colloque International « User Interfaces for Theorem Provers » satellite de TPHOLs 2003, pages 32–45, Rome, Italie, Septembre 2003.

[4] Y. Bertot, G. Kahn et L. Théry. *Proof by Pointing.* M. Hagiya and J. C. Mitchell editeurs, Actes du Colloque International « Symposium on Theoretical Aspects of Computer Softward », pages 141–160, Sendai, Japon, 1994. Springer-Verlag LNCS 789.

[5] *Cabri géométre*, disponible à l'adresse : `http ://www-cabri.imag.fr/`.

[6] S. Chou. *Mechanical Geometry Theorem Proving* Maison d'édition D.Reidel, Hollande, 1988.

[7] *GeoplanJ*, disponible à l'adresse : `http ://mapage.noos.fr/fkotecki/geoplanj.html`

[8] *GeoplanW*, disponible à l'adresse : `http ://www2.cnam.fr/creem/GeoplanW/geoplanw.htm`

[9] L. Théry. *Formal Proof Authoring : an Experiment.* Actes du Colloque International « User Interfaces for Theorem Provers » satellite de TPHOLs 2003, pages 143–159, Rome, Italie, Septembre 2003.

[10] L'équipe de développement de Coq. *The Coq Proof Assistant : Reference Manual : Version 7.2.* Rapport Technique RT-02555, INRIA, février 2002.