

# Prouver que $\pi$ est irrationnel avec MATHCOMP-ANALYSIS

Reynald Affeldt

National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST), Japon

28 janvier 2025

# MATHCOMP et MATHCOMP-ANALYSIS

- ▶ Mathematical Components (MATHCOMP) est une bibliothèque Rocq bien connue pour formaliser l'algèbre, e.g.,
  - ▶ formalisation du théorème des quatre couleurs [Gon08],
  - ▶ de Feit-Thompson [GAA<sup>+</sup>13],
  - ▶ d'Abel-Ruffini [BCMS21], etc.

# MATHCOMP et MATHCOMP-ANALYSIS

- ▶ Mathematical Components (MATHCOMP) est une bibliothèque Rocq bien connue pour formaliser l'algèbre, e.g.,
  - ▶ formalisation du théorème des quatre couleurs [Gon08],
  - ▶ de Feit-Thompson [GAA<sup>+</sup>13],
  - ▶ d'Abel-Ruffini [BCMS21], etc.
- ▶ MATHCOMP-ANALYSIS[ACR18] étend MATHCOMP pour formaliser l'analyse
  - ▶ Effort collectif (<https://github.com/math-comp/analysis>)
  - ▶ Autorise le raisonnement classique
  - ▶ Exemple récent de résultat formalisé :  
premier théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale de Lebesgue
    - ▶ présenté aux JFLA 2024 [AS24b] (puis à ITP 2024 [AS24a])

# Motivation

- ▶ Présentation de type outil logiciel
- ▶ Exemple concret et de taille raisonnable :  
une preuve bien connue que  $\pi$  est irrationnel
  - ▶ Exercice proposé par Laurence Rideau
- ▶ Montrer en quoi MATHCOMP complémente MATHCOMP-ANALYSIS

# Ivan Niven, A simple proof that $\pi$ is irrational, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53(6) : 509–509 (1947)

## A SIMPLE PROOF THAT $\pi$ IS IRRATIONAL

IVAN NIVEN

Let  $\pi = a/b$ , the quotient of positive integers. We define the polynomials

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer  $n$  being specified later. Since  $n!f(x)$  has integral coefficients and terms in  $x$  of degree not less than  $n$ ,  $f(x)$  and its derivatives  $f^{(j)}(x)$  have integral values for  $x=0$ ; also for  $x=\pi=a/b$ , since  $f(x)=f(a/b-x)$ . By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

and

$$(1) \quad \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0).$$

Now  $F(\pi) + F(0)$  is an integer, since  $f^{(j)}(\pi)$  and  $f^{(j)}(0)$  are integers. But for  $0 < x < \pi$ ,

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

so that the integral in (1) is positive, but arbitrarily small for  $n$  sufficiently large. Thus (1) is false, and so is our assumption that  $\pi$  is rational.

PURDUE UNIVERSITY

Received by the editors November 26, 1946, and, in revised form, December 20, 1946.

## Preuve par contradiction :

### 1. Partie algébrique :

- On introduit deux polynômes  $f$  et  $F$  qui dépendent d'un  $n$
- Si  $\pi$  était rationnel,  $F(0)$  et  $F(\pi)$  seraient entiers

### 2. Partie analytique :

- $\int_{x \in [0, \pi]} f(x) \sin(x) d\mu = F(\pi) + F(0)$
- $\int_{x \in [0, \pi]} f(x) \sin(x) d\mu$  serait strictement positif et arbitrairement petit, contradiction

# Outline

Partie algébrique de la preuve de Niven

Partie analytique de la preuve de Niven

# L'hypothèse contradictoire

Let  $\pi = a/b$ , the quotient of positive integers.

# L'hypothèse contradictoire

Let  $\pi = a/b$ , the quotient of positive integers.

- ▶ Les nombres réels sont définis dans `reals.v` (MATHCOMP-ANALYSIS)
- ▶ On trouve la définition de  $\pi$  dans `trigo.v` (MATHCOMP-ANALYSIS)

# L'hypothèse contradictoire

Let  $\pi = a/b$ , the quotient of positive integers.

- ▶ Les nombres réels sont définis dans `reals.v` (MATHCOMP-ANALYSIS)
- ▶ On trouve la définition de  $\pi$  dans `trigo.v` (MATHCOMP-ANALYSIS)

```
Variable na : nat.  
Variable nb : nat.  
Definition a := na%:R. (*injection dans un anneau, notation générique*)  
Definition b := nb%:R.  
Definition pirat := a / b.  
Hypothesis piratE : pirat = pi.
```

# Le polynôme $f$

nomials

We define the poly-

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

## Le polynôme $f$

nomials

We define the poly-

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

Formalisation  $\simeq$  traduction  $\Rightarrow$  “dictionnaire”

# Le polynôme $f$

nomials

We define the poly-

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

Formalisation  $\simeq$  traduction  $\Rightarrow$  “dictionnaire”

|                                                      |              |
|------------------------------------------------------|--------------|
| multiplication                                       | *            |
| multiplication itérée $\underbrace{x * \dots * x}_n$ | $\wedge + n$ |
| inverse                                              | $\wedge - 1$ |
| l'indéterminée                                       | 'X           |
| multiplication par un scalaire                       | * :          |
| injection d'un scalaire dans les polynômes           | %:P          |
| factorielle                                          | `!           |

# Le polynôme $f$

nomials

We define the poly-

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

Formalisation  $\simeq$  traduction  $\Rightarrow$  “dictionnaire”

|                                                      |              |
|------------------------------------------------------|--------------|
| multiplication                                       | *            |
| multiplication itérée $\underbrace{x * \dots * x}_n$ | $\wedge + n$ |
| inverse                                              | $\wedge - 1$ |
| l'indéterminée                                       | 'X           |
| multiplication par un scalaire                       | *:           |
| injection d'un scalaire dans les polynômes           | :%:P         |
| factorielle                                          | `!           |

**Definition**  $f : \{\text{poly } R\} :=$

$$n`! \% : R^{\wedge - 1} * : ('X^{\wedge n} * (a \% : P - b * : 'X)^{\wedge + n}).$$

## Propriétés de $f$

Since  $n!f(x)$  has integral coefficients and terms in  $x$  of degree not less than  $n$ ,

## Propriétés de $f$

Since  $n!f(x)$  has integral coefficients and terms in  $x$  of degree not less than  $n$ ,

e.g.,  $n!f(x)$  n'a pas de termes de degré inférieur à  $n$  :

## Propriétés de $f$

Since  $n!f(x)$  has integral coefficients and terms in  $x$  of degree not less than  $n$ ,

e.g.,  $n!f(x)$  n'a pas de termes de degré inférieur à  $n$  :

Let  $f\_small\_coef0\ i : (i < n) \rightarrow f\_i = 0$ .

## Propriétés de $f$

Since  $n!f(x)$  has integral coefficients and terms in  $x$  of degree not less than  $n$ ,

e.g.,  $n!f(x)$  n'a pas de termes de degré inférieur à  $n$  :

```
Let f_small_coef0 i : (i < n)%N -> f`_i = 0.
```

⇒ Les propriétés de  $f$  sont des exemples de preuves formelles “faciles”,  
i.e., dirigées par la syntaxe

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

$f`_i = 0$

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

$$f`_i = 0$$

$$(n`! \% R^{-1} * : ( 'X^n * (a \% P - b * : 'X)^{+ n} ) )`_i = 0$$

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

$$f`_i = 0$$

$$(n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X)^{n+1}))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X)^{n+1})`_i = 0$$

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

$$f`_i = 0$$

$$(n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X^{n+1})))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X^{n+1}))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (\text{if } (i < n)\%N \text{ then } 0 \text{ else } ((a \% P - b \% X^{n+1}))`_{-(i-n)}) = 0$$

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

$$f`_i = 0$$

$$(n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X^{n+1})))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X^{n+1}))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (\text{if } (i < n)\%N \text{ then } 0 \text{ else } ((a \% P - b \% X^{n+1}))`_{-(i-n)}) = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * 0 = 0$$

## Script :

```

Let f_small_coef0 i :
  (i < n)%N -> f`_i = 0.
Proof.
move=> ni.

rewrite /f.

rewrite coefZ.

rewrite coefXnM.

rewrite ni.

rewrite mulr0.
done.
Qed.

```

## Buts intermédiaires :

$$f`_i = 0$$

$$(n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X^{n+1})))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (X^n * (a \% P - b \% X^{n+1}))`_i = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * (\text{if } (i < n)\%N \text{ then } 0 \text{ else } ((a \% P - b \% X^{n+1}))`_{i-n}) = 0$$

$$n`! \% R^{n-1} * 0 = 0$$

$$0 = 0$$

## Le polynôme $F$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer  $n$  being specified later.

## Le polynôme $F$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer  $n$  being specified later.

Notation pour la dérivée nième :  $f^{(n)}$  (MATHCOMP)

## Le polynôme $F$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer  $n$  being specified later.

Notation pour la dérivée nième :  $f^{(n)}$  (MATHCOMP)

$$f + \dots + (-1)^n : f^{(2)} + \dots + f^{(4)} + \dots + (-1)^n : f^{(n \cdot 2)}$$

## Le polynôme $F$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer  $n$  being specified later.

Notation pour la dérivée nième :  $f^{(n)}$  (MATHCOMP)

$$f + \dots + (-1)^n : f^{(2)} + \dots + f^{(4)} + \dots + (-1)^n : f^{(n \cdot 2)}$$

↓ (les opérateurs itérés de MATHCOMP [BGBP08])

**Definition**  $F : \{\text{poly } R\} := \sum_{(i < n.+1)} (-1)^i : f^{(i \cdot 2)}$

## La principale propriété de $F$

Now  $F(\pi) + F(0)$  is an *integer*, since  $f^{(j)}(\pi)$  and  $f^{(j)}(0)$  are integers.

**Lemma** `F0_int` : `F.[0]` \is a `Num.int`.

**Lemma** `Fpi_int` : `F.[pi]` \is a `Num.int`.

$\Rightarrow$  il s'agit encore de preuves “faciles” (et donc de bons exercices)

# Outline

Partie algébrique de la preuve de Niven

Partie analytique de la preuve de Niven

## Calcul de dérivée d'une fonction réelle

By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

## Calcul de dérivée d'une fonction réelle

By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

```
Let fsin_antiderivative n :
  'D_1 (fun x => (F n)^[n]. [x] * sin x - (F n). [x] * cos x) =
```

## Calcul de dérivée d'une fonction réelle

By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

```
Let fsin_antiderivative n :
  'D_1 (fun x => (F n)^[x] * sin x - (F n).[x] * cos x) =
    (fun x => (f n).[x] * sin x).
```

## Calcul de dérivée d'une fonction réelle

By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

```
Let fsin_antiderivative n :
  'D_1 (fun x => (F n)^[x] * sin x - (F n).[x] * cos x) =
    (fun x => (f n).[x] * sin x).
```

Proof.

```
apply/funext => x/=.
```

```
rewrite deriveB//= !deriveM// !derive_val. (* preuves *)
```

```
rewrite opprD scalerN opprK. (* "faciles" *)
```

## Calcul de dérivée d'une fonction réelle

By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

```
Let fsin_antiderivative n :
  'D_1 (fun x => (F n)^[x] * sin x - (F n).[x] * cos x) =
    (fun x => (f n).[x] * sin x).
```

Proof.

```
apply/funext => x/=.
```

```
rewrite deriveB//= !deriveM// !derive_val. (* preuves *)
```

```
rewrite opprD scalerN opprK. (* "faciles" *)
```

Résultat intermédiaire :  $\cancel{F'(x) \cos(x)} + F''(x) \sin(x) + F(x) \sin(x) - \cancel{F'(x) \cos(x)}$

## Calcul de dérivée d'une fonction réelle

By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

```
Let fsin_antiderivative n :
  'D_1 (fun x => (F n)^[x] * sin x - (F n).[x] * cos x) =
    (fun x => (f n).[x] * sin x).
```

Proof.

```
apply/funext => x/=.
```

```
rewrite deriveB//= !deriveM// !derive_val. (* preuves *)
```

```
rewrite opprD scalerN opprK. (* "faciles" *)
```

Résultat intermédiaire :  $\cancel{F'(x) \cos(x)} + F''(x) \sin(x) + F(x) \sin(x) - \cancel{F'(x) \cos(x)}$

On conclut en montrant que  $F'' + F = f$

## Second théorème fondamental de l'analyse

Rappel de lycée :

$$\left( \forall x \in ]a, b[, \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \right) \rightarrow \int_{x \in [a, b]} f(x) d\mu = F(b) - F(a)$$

## Second théorème fondamental de l'analyse

Rappel de lycée :

$$\left( \forall x \in ]a, b[, \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \right) \rightarrow \int_{x \in [a, b]} f(x) d\mu = F(b) - F(a)$$

Dans MATHCOMP-ANALYSIS :

**Corollary** continuous\_FTC2  $f F a b : (a < b) \% \mathbb{R} \rightarrow$

```
{in `]a, b[, 'D_1 F =1 f} ->
\int[\mu]_(x in `[a, b]) (f x) %: E = (F b) %: E - (F a) %: E.
```

## Second théorème fondamental de l'analyse

Rappel de lycée :

$$\left( \forall x \in ]a, b[, \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \right) \rightarrow \int_{x \in [a, b]} f(x) d\mu = F(b) - F(a)$$

Dans MATHCOMP-ANALYSIS :

```
Corollary continuous_FTC2 f F a b : (a < b)%R ->
  {within `[a, b], continuous f} ->      (* hypothèse sur la classe *)
  derivable_oo_continuous_bnd F a b ->   (* de régularité de F      *)
  {in `[a, b[, 'D_1 F =1 f} ->
  \int[\mu]_(x in `[a, b]) (f x)%:E = (F b)%:E - (F a)%:E.
```

## Second théorème fondamental de l'analyse

Rappel de lycée :

$$\left( \forall x \in ]a, b[, \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \right) \rightarrow \int_{x \in [a, b]} f(x) d\mu = F(b) - F(a)$$

Dans MATHCOMP-ANALYSIS :

```
Corollary continuous_FTC2 f F a b : (a < b)%R ->
  {within `[a, b], continuous f} ->      (* hypothèse sur la classe *)
  derivable_oo_continuous_bnd F a b ->  (* de régularité de F      *)
  {in `[a, b[, 'D_1 F =1 f} ->
  \int[mu]_(x in `[a, b]) (f x)%:E = (F b)%:E - (F a)%:E.
```

► NB : C'est un corollaire du premier théorème fondamental de l'analyse

## Application du théorème fondamental de l'analyse

and

$$(1) \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0).$$

## Application du théorème fondamental de l'analyse

and

$$(1) \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0).$$

Let intfsinE n :

`\int[μ]_(x in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x = (F n).[pi] + (F n).[0].`  
 Proof.

## Application du théorème fondamental de l'analyse

and

$$(1) \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0).$$

```

Let intfsinE n :
  \int[μ]_(x in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x = (F n).[pi] + (F n).[0].
Proof.
rewrite /Rintegral.
set G := fun x => ((F n)^(())).[x] * sin x - (F n).[x] * cos x.
  
```

## Application du théorème fondamental de l'analyse

and

$$(1) \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0).$$

```

Let intfsinE n :
  \int[μ]_(x in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x = (F n).[pi] + (F n).[0].
Proof.
rewrite /Rintegral.
set G := fun x => ((F n)^(x)).[x] * sin x - (F n).[x] * cos x.
rewrite (@continuous_FTC2 _ _ G).
  
```

## Application du théorème fondamental de l'analyse

and

$$(1) \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0).$$

```

Let intfsinE n :
  \int[μ](x in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x = (F n).[pi] + (F n).[0].
Proof.
rewrite /Rintegral.
set G := fun x => ((F n)^(x)).[x] * sin x - (F n).[x] * cos x.
rewrite (@continuous_FTC2 _ _ G).
- (* G pi - G 0 = (F n).[pi] - (F n).[0] *)
- (* 0 < pi *)
- (* continuous (fun x => (f n).[x] * sin x) *)
- (* derivable_oo_continuous_bnd G 0 pi *)
- (* {in `]0, pi[ℝ, G^(x) = 1 (fun x => (f n).[x] * sin x)} *)
Qed.

```

## Encadrement de $f(x) \sin(x)$

for  $0 < x < \pi$ ,

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

But

## Encadrement de $f(x) \sin(x)$

for  $0 < x < \pi$ ,

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

But

Traduction :

```
Let fsin_bounded n (x : R) : (0 < n)%N -> 0 < x < pi ->
  0 < (f n).[x] * sin x < (pi ^+ n * a ^+ n) / n`!%:R.
```

## Encadrement de $f(x) \sin(x)$

But

for  $0 < x < \pi$ ,

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

Traduction :

```
Let fsin_bounded n (x : R) : (0 < n)%N -> 0 < x < pi ->
  0 < (f n).[x] * sin x < (pi ^+ n * a ^+ n) / n`!%:R.
```

C'est une conséquence du fait que  $a - bx < a$

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for  $n$  sufficiently large.

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for  $n$  sufficiently large.

```
Lemma intfsin_small e : 0 < e ->
  \forall n \nearrow \infty,
    0 < \int[\mu]_(x \in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x < e.
```

►  $\nearrow \infty \simeq$  vrai au voisinage de  $\infty$

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for  $n$  sufficiently large.

```
Lemma intfsin_small e : 0 < e ->
  \forall n \nearrow \infty,
    0 < \int[\mu]_(x in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x < e.
```

►  $\nearrow \infty \simeq$  vrai au voisinage de  $\infty$

Tactique near (MATHCOMP-ANALYSIS) :

```
e : R
e0 : 0 < e
=====
\forall n \nearrow \infty,
  0 < intfsin n < e
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for  $n$  sufficiently large.

```
Lemma intfsin_small e : 0 < e ->
  \forall n \nearrow \infty,
    0 < \int[\mu]_(x in `[0, pi]) (f n).[x] * sin x < e.
```

►  $\nearrow \infty \simeq$  vrai au voisinage de  $\infty$

Tactique near (MATHCOMP-ANALYSIS) :

```
e : R
e0 : 0 < e
```

```
=====
\forall n \nearrow \infty,
  0 < intfsin n < e
```

near=> n.

```
e : R
e0 : 0 < e
n : nat
near=> n. _Hyp_ : n \is_near \infty
```

```
=====
0 < intfsin n < e
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On utilise l'encadrement précédent pour changer le but

$$0 < \int_{x \in [0, \pi]} f(x) \sin(x) d\mu < \varepsilon \quad \text{en} \quad \pi \frac{(\pi a)^n}{n!} < \varepsilon$$

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On utilise l'encadrement précédent pour changer le but

$$0 < \int_{x \in [0, \pi]} f(x) \sin(x) d\mu < \varepsilon \quad \text{en} \quad \pi \frac{(\pi a)^n}{n!} < \varepsilon$$

```
e : ℝ
e0 : 0 < e
n : nat
_Hyp_ : n \is_near \infty
=====
0 < intfsin n < e
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On utilise l'encadrement précédent pour changer le but

$$0 < \int_{x \in [0, \pi]} f(x) \sin(x) d\mu < \varepsilon \quad \text{en} \quad \pi \frac{(\pi a)^n}{n!} < \varepsilon$$

```
e : R
e0 : 0 < e
n : nat
_Hyp_ : n \is_near \oo
=====
0 < intfsin n < e
```

...

```
e : R
e0 : 0 < e
n : nat
_Hyp_ : n \is_near \oo
=====
pi * ((pi * a) ^+ n / n`!%:R) < e
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On utilise l'encadrement précédent pour changer le but

$$0 < \int_{x \in [0, \pi]} f(x) \sin(x) d\mu < \varepsilon \quad \text{en} \quad \pi \frac{(\pi a)^n}{n!} < \varepsilon$$

```
e : R
e0 : 0 < e
n : nat
_Hyp_ : n \is_near \oo
=====
0 < intfsin n < e
```

...

```
e : R
e0 : 0 < e
n : nat
_Hyp_ : n \is_near \oo
=====
pi * ((pi * a) ^+ n / n`!%:R) < e
```

near: n.

```
e : R
e0 : 0 < e
=====
\forall n \nearrow \oo,
  pi * ((pi * a) ^+ n / n`!%:R) < e
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On peut prouver  $\pi \frac{(\pi a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  comme une conséquence de  $\frac{r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On peut prouver  $\pi \frac{(\pi a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  comme une conséquence de  $\frac{r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(\* notation pour la convergence \*)

```
have : pi * (pi * a) ^+ n / n`!%:R @[n --> \oo] --> 0.
  rewrite -[X in _ --> X] (mulr0 pi).
  under eq_fun do rewrite -mulrA.
  by apply: cvgMr; exact: exp_fact.
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On peut prouver  $\pi \frac{(\pi a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  comme une conséquence de  $\frac{r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(\* notation pour la convergence \*)

```
have : pi * (pi * a) ^+ n / n`!%:R @[n --> \oo] --> 0.
  rewrite -[X in _ --> X] (mulr0 pi).
  under eq_fun do rewrite -mulrA.
  by apply: cvgMr; exact: exp_fact.
```

```
e : R
```

```
e0 : 0 < e
```

```
=====
```

```
pi * (pi * a) ^+ n / n`!%:R @[n --> \oo] --> 0 ->
```

```
\forall n \nearrow \oo, pi * ((pi * a) ^+ n / n`!%:R) < e
```

$\int_0^\pi f(x) \sin(x)$  peut être arbitrairement petit

On peut prouver  $\pi \frac{(\pi a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  comme une conséquence de  $\frac{r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(\* notation pour la convergence \*)

```
have : pi * (pi * a) ^+ n / n`!%:R @[n --> \oo] --> 0.
  rewrite -[X in _ --> X] (mulr0 pi).
  under eq_fun do rewrite -mulrA.
  by apply: cvgMr; exact: exp_fact.
```

```
e : R
e0 : 0 < e

=====
pi * (pi * a) ^+ n / n`!%:R @[n --> \oo] --> 0 ->
\forall n \nearrow \oo, pi * ((pi * a) ^+ n / n`!%:R) < e
```

```
move/cvgrPdist_lt => /(_ _ e0).
```

```
e : R
e0 : 0 < e

=====
(\forall m \nearrow \oo, `|0 - pi * (pi * a) ^+ m / m`!%:R| < e) ->
\forall n \nearrow \oo, pi * ((pi * a) ^+ n / n`!%:R) < e
```

# Conclusion

## Travaux connexes :

- ▶ La preuve de Niven est mentionnée dans [BBRS16] mais l'utilisation de MATHCOMP et COQUELICOT [BLM15, Sect. 3.3.4] rend la formalisation compliquée
- ▶ Le théorème fondamental de l'analyse rend possible la formalisation de nombreux exemples
  - ▶ Récentes formalisations : la distribution  $\beta$ , l'intégrale de Gauss
- ▶ Autres applications de MATHCOMP-ANALYSIS
  - ▶ programmes probabilistes [ACS23, SA23]

## Documentation :

- ▶ Fichiers systématiquement documentés dans leur en-tête
- ▶ Version HTML avec graphes et formules  $\text{\LaTeX}$
- ▶ Notes de cours : [Aff22]
- ▶ Plusieurs articles sur l'intégration : [AC23, IA24, AS24a]

- [AC23] Reynald Affeldt and Cyril Cohen, Measure construction by extension in dependent type theory with application to integration, *J. Autom. Reason.* **67** (2023), no. 3, 28 :1–28 :27.
- [ACR18] Reynald Affeldt, Cyril Cohen, and Damien Rouhling, Formalization techniques for asymptotic reasoning in classical analysis, *J. Formaliz. Reason.* **11** (2018), no. 1, 43–76.
- [ACS23] Reynald Affeldt, Cyril Cohen, and Ayumu Saito, Semantics of probabilistic programs using s-finite kernels in Coq, 12th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs (CPP 2023), Boston, MA, USA, January 16–17, 2023, ACM, 2023, pp. 3–16.
- [Aff22] Reynald Affeldt, An introduction to mathcomp-analysis, 2022, Intensive course, Graduate School of Mathematics, Nagoya University.
- [AS24a] Reynald Affeldt and Zachary Stone, A comprehensive overview of the Lebesgue differentiation theorem in Coq, 15th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2024) September 9–14, 2024, Tbilisi, Georgia, LIPIcs, vol. 309, Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2024, pp. 5 :1–5 :19.
- [AS24b] ———, Towards the fundamental theorem of calculus for the Lebesgue integral in Coq, 35ème Journées Francophones des Langues Applicatifs (JFLA 2024), Saint-Jacut-de-la-Mer, France, Janvier 30–Février 2, Inria et autres, January 2024, pp. 300–304.
- [BBRS16] Sophie Bernard, Yves Bertot, Laurence Rideau, and Pierre-Yves Strub, Formal proofs of transcendence for e and pi as an application of multivariate and symmetric polynomials, 5th ACM SIGPLAN Conference on Certified Programs and Proofs, Saint Petersburg, FL, USA, January 20–22, 2016, ACM, 2016, pp. 76–87.
- [BCMS21] Sophie Bernard, Cyril Cohen, Assia Mahboubi, and Pierre-Yves Strub, Unsolvability of the quintic formalized in dependent type theory, 12th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2021), June 29–July 1, 2021, Rome, Italy (Virtual Conference), LIPIcs, vol. 193, Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021, pp. 8 :1–8 :18.
- [BGBP08] Yves Bertot, Georges Gonthier, Sidi Ould Biha, and Ioana Pasca, Canonical big operators, 21st International Conference on Theorem Proving in Higher Order Logics (TPHOLS 2008), Montreal, Canada, August 18–21, 2008, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5170, Springer, 2008, pp. 86–101.
- [BLM15] Sylvie Boldo, Catherine Lelay, and Guillaume Melquiond, Coquelicot : A user-friendly library of real analysis for Coq, *Math. Comput. Sci.* **9** (2015), no. 1, 41–62.
- [GAA<sup>+</sup>13] Georges Gonthier, Andrea Asperti, Jeremy Avigad, Yves Bertot, Cyril Cohen, François Garillot, Stéphane Le Roux, Assia Mahboubi, Russell O'Connor, Sidi Ould Biha, Ioana Pasca, Laurence Rideau, Alexey Solovyev, Enrico Tassi, and Laurent Théry, A machine-checked proof of the odd order theorem, 4th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2013), Rennes, France, July 22–26, 2013, Lecture Notes in Computer Science, vol. 7998, Springer, 2013, pp. 163–179.
- [Gon08] Georges Gonthier, Formal proof—the four-color theorem, *Notices of the AMS* **55** (2008), no. 11, 1382–1393.

- [IA24] Yoshihiro Ishiguro and Reynald Affeldt, [The Radon-Nikodým theorem and the Lebesgue-Stieltjes measure in Coq](#), Computer Software **41** (2024), no. 2, Japan Society for Software Science and Technology.
- [SA23] Ayumu Saito and Reynald Affeldt, [Experimenting with an intrinsically-typed probabilistic programming language in Coq](#), 21st Asian Symposium on Programming Languages and Systems (APLAS 2023), Taipei, Taiwan, November 26–29, 2023, vol. 14405, Springer, 2023, pp. 182–202.