

Affectations et stratégies dans la répartition démocratique analysées en Isabelle/HOL

Jan-Georg Smaus

JFLA 2026 Oberbronn

29 janvier 2026



Institut de Recherche
en Informatique de Toulouse

CNRS - Toulouse INP - UT - UT Capitole - UT2

Répartition démocratique

- ▶ Application de la **preuve assistée** à la **théorie des jeux**.
- ▶ *Democratic Forking : Choosing Sides with Social Choice* [AEG⁺21].

Le scénario est très simple : n agents (“**électeurs**”) doivent décider entre plusieurs **alternatives**.

Chaque électeur a une préférence concernant les alternatives, mais il préfère aussi un groupe large à un groupe plus petit.



Répartition démocratique

- ▶ Application de la **preuve assistée** à la **théorie des jeux**.
- ▶ *Democratic Forking : Choosing Sides with Social Choice* [AEG⁺21].

Le scénario est très simple : n agents (“**électeurs**”) doivent décider entre plusieurs **alternatives**.

Chaque électeur a une préférence concernant les alternatives, mais il préfère aussi un groupe large à un groupe plus petit.

- ▶ Y a-t-il une **affectation** des électeurs aux alternatives qui est **stable** ?



Contributions

- ▶ Dans un article précédent [Sma24], j'ai formalisé plusieurs résultats sur la répartition démocratique en utilisant l'assistant de preuve **Isabelle/HOL**.

Contributions

- ▶ Dans un article précédent [Sma24], j'ai formalisé plusieurs résultats sur la répartition démocratique en utilisant l'assistant de preuve **Isabelle/HOL**.
- ▶ Dans cet **article** on trouve plusieurs extensions et généralisations de ce travail.
- ▶ Dans ma **présentation** je me concentre sur la **résistance aux stratégies**.

Applications de la répartition démocratique

- Les auteurs pensent à des sujets politiques et sociétaux.

Applications de la répartition démocratique

- ▶ Les auteurs pensent à des sujets politiques et sociétaux.
- ▶ Par exemple, le **genre grammatical** :
 - ▶ “Je vais de toute façon utiliser le féminin générique !”
 - ▶ “Je préfère le masculin générique, mais si une vaste majorité préfère le féminin générique, je m’adapte !”
 - ▶ “Je veux surtout que tout le monde fasse pareil !”
 - ▶ ...

(Dans l'article j'utilise le féminin générique.)

Applications de la répartition démocratique

- ▶ Les auteurs pensent à des sujets politiques et sociétaux.
- ▶ Par exemple, le **genre grammatical** :
 - ▶ “Je vais de toute façon utiliser le féminin générique !”
 - ▶ “Je préfère le masculin générique, mais si une vaste majorité préfère le féminin générique, je m’adapte !”
 - ▶ “Je veux surtout que tout le monde fasse pareil !”
 - ▶ ...

Ces opinions peuvent s’exprimer comme **préférences** sur des **alternatives**.

(Dans l’article j’utilise le féminin générique.)

Plan

Définitions et travaux précédents

Résistance aux stratégies

Autres résultats

Discussion

Quelques définitions

- ▶ Un ensemble d'**alternatives** $\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$.
- ▶ Un ensemble d'**électeurs** $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Quelques définitions

- ▶ Un ensemble d'**alternatives** $\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$.
- ▶ Un ensemble d'**électeurs** $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.
- ▶ Une **communauté** est un élément de $\mathcal{A} \times \{1, \dots, n\}$, c.-à-d., une alternative couplée avec le nombre d'électeurs affectés à cette alternative, par exemple : $(B, 3)$.

Quelques définitions

- ▶ Un ensemble d'**alternatives** $\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$.
- ▶ Un ensemble d'**électeurs** $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.
- ▶ Une **communauté** est un élément de $\mathcal{A} \times \{1, \dots, n\}$, c.-à-d., une alternative couplée avec le nombre d'électeurs affectés à cette alternative, par exemple : $(B, 3)$.
- ▶ Une **préférence** est un sous-ensemble de $(\mathcal{A} \times \{1, \dots, n\}) \times (\mathcal{A} \times \{1, \dots, n\})$, c.-à-d., une relation sur les communautés. Les préférences doivent être **monotones** : $(S, n) \succ \dots \succ (S, 1)$ (et antisymétriques and transitives). L'ensemble de toutes les préférences est noté $\mathcal{T}$.
- ▶ Un **profil de préférences** est un élément de $\mathcal{T}^n$.

Un exemple de profil de préférences

Soient $\mathcal{A} = \{A, B\}$ et $V = \{v_1, v_2\}$ où
 $v_1 : (A, 2) \succ_1 (A, 1) \succ_1 (B, 2) \succ_1 (B, 1)$ et
 $v_2 : (B, 2) \succ_2 (B, 1) \succ_2 (A, 2) \succ_2 (A, 1)$.
C'est un profil de préférences.

Encore des définitions

- Une **affectation** est une fonction $f : V \rightarrow \mathcal{A}l$.

Encore des définitions

- ▶ Une **affectation** est une fonction $f : V \rightarrow \mathcal{A}$.
- ▶ Étant donné une affectation f , quelques électeurs pourraient avoir intérêt à **dévier** : il pourrait y avoir un groupe $V' \subseteq V$ et une affectation $f' : V \rightarrow \mathcal{A}$ tels que pour tout $v_i \in V'$, on a $f'(v_i) \neq f(v_i)$ et

$$(f'(v_i), \#(f'^{-1}(f'(v_i)))) \succ_i (f(v_i), \#(f^{-1}(f(v_i)))) ,$$

c.-à-d. v_i préfère “sa f' -communauté” à “sa f -communauté”.

Encore des définitions

- ▶ Une **affectation** est une fonction $f : V \rightarrow \mathcal{A}$.
- ▶ Étant donné une affectation f , quelques électeurs pourraient avoir intérêt à **dévier** : il pourrait y avoir un groupe $V' \subseteq V$ et une affectation $f' : V \rightarrow \mathcal{A}$ tels que pour tout $v_i \in V'$, on a $f'(v_i) \neq f(v_i)$ et

$$(f'(v_i), \#(f'^{-1}(f'(v_i)))) \succ_i (f(v_i), \#(f^{-1}(f(v_i)))) ,$$

c.-à-d. v_i préfère “sa f' -communauté” à “sa f -communauté”.

- ▶ Une affectation est **stable** si aucune déviation n'existe.

Exemple revisité

Soient $\mathcal{A} = \{A, B\}$ et deux électeurs, $V = \{v_1, v_2\}$ où

$v_1 : (A, 2) \succ_1 (A, 1) \succ_1 (B, 2) \succ_1 (B, 1)$ et

$v_2 : (B, 2) \succ_2 (B, 1) \succ_2 (A, 2) \succ_2 (A, 1)$.

Chaque électeur préfère être seul à son alternative préférée à être ensemble avec l'autre électeur à l'autre alternative. L'unique affectation stable est donc $f(v_1) = A$, $f(v_2) = B$.

Isabelle/HOL

- Les assistants de preuve sont utiles pour conduire des preuves mathématiques sur un ordinateur.

Isabelle/HOL

- ▶ Les assistants de preuve sont utiles pour conduire des preuves mathématiques sur un ordinateur.
- ▶ **Isabelle/HOL** est un assistant de preuve qui utilise la **logique de l'ordre supérieur** : la syntaxe est basée sur le λ -calcul typé (comme OCaml).
- ▶ Nous utilisons Isabelle/HOL en style de preuve **ISAR**.

Une locale pour le profil

Comme le profil de préférences est omniprésent dans notre théorie, il convient de le fixer via une **locale** :

```
locale GoodPreferences =  
  fixes preferenceProfile :: "'V  $\Rightarrow$  ('A1 preference)"  
  assumes monotonic_preferences: " $\forall v.$  monotonic  
    (preferenceProfile v)"  
  and antisym_preferences: " $\forall v.$  antisym (preferenceProfile v)"  
  and trans_preferences: " $\forall v.$  trans (preferenceProfile v)"
```

C'est comme si toutes les fonctions définies dans la suite avaient *preferenceProfile* comme paramètre. C'est très pratique !

Existence d'une affectation stable

Le théorème principal de [AEG⁺21] est :

Théorème

Pour chaque profil de préférences monotone, il existe une affectation stable.

Dans le travail précédent [Sma24], j'ai prouvé ce résultat en Isabelle/HOL.

Ici, je présente plusieurs résultats supplémentaires ...

Règles de vote

Ici, $\mathcal{A} = \{A, B\}$. On note les affectations par $\langle V_A, V_B \rangle$.

Une **règle de vote** est une fonction $R : \mathcal{T}^n \longrightarrow (V \longrightarrow \mathcal{A})$. Elle doit rendre une affectation **stable**.

Règles de vote

Ici, $\mathcal{A} = \{A, B\}$. On note les affectations par $\langle V_A, V_B \rangle$.

Une **règle de vote** est une fonction $R : \mathcal{T}^n \rightarrow (V \rightarrow \mathcal{A})$. Elle doit rendre une affectation **stable**.

Nous considérons maintenant des préférences **prétendues**.

Définition

(simplifiée [AEG⁺21]) Une règle R **résiste aux stratégies** si pour tout profil $P \in \mathcal{T}^n$, il n'y a aucun électeur $v_i \in V$ qui peut modifier sa préférence en P' tel qu'il préfère $R(P')$ à $R(P)$.

Idée de la stratégie (manipulation)

Supposons qu'il y a deux affectations stables f et g et que la règle de vote choisit f .

Un électeur v qui n'est pas content avec f (en particulier avec $f(v)$) peut **mentir** en disant $(g(v), 1) \succ_v (f(v), n)$, ce qui rend f **instable**. Il signale qu'il n'est pas prêt au compromis !

L'espoir de v est que d'autres électeurs vont le suivre et que l'affectation résultante est effectivement g .

Je vous présente ...

Dans plusieurs exemples, nous aurons



Agnetha



Anni-Frid



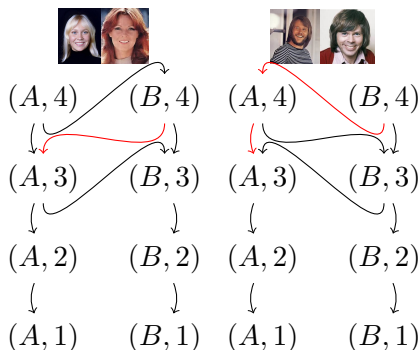
Benny



Björn

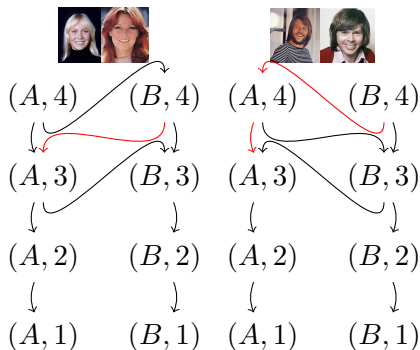
où les deux femmes préfèrent A et les deux hommes préfèrent B .

Exemple de manipulation

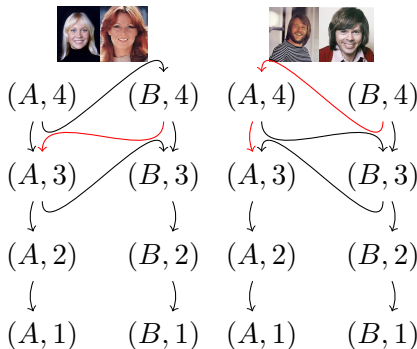


Exemple de manipulation

$\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables.



Exemple de manipulation



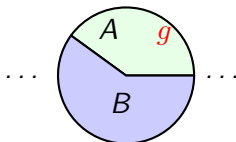
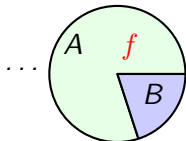
$\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables. Benny décide de manipuler en prétendant $(B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4)$; ainsi $\langle V, \emptyset \rangle$ devient instable. Or, $\langle \{Ag., An., Bj.\}, \{Be.\} \rangle$ est toujours instable; Agnetha, Anni-Frid et Björn vont dévier laissant $\langle \emptyset, V \rangle$ comme seule affectation stable. La manipulation par Benny a fonctionné.

Un **faux** théorème [AEG⁺21, Theorem 3]

Théorème

Aucune règle de vote ne peut résister aux stratégies dans les cas où au moins deux affectations stables existent.

“Preuve”. Considérons deux affectations stables **voisines** :



Un **faux** théorème [AEG⁺21, Theorem 3]

Théorème

Aucune règle de vote ne peut résister aux stratégies dans les cas où au moins deux affectations stables existent.

"Preuve". Considérons deux affectations stables **voisines** :



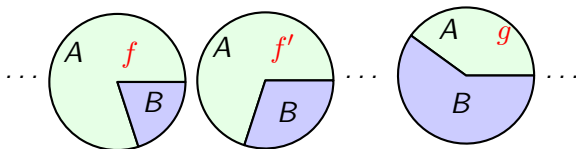
Il y aura forcément un A -électeur dans f qui préfère g . Alors en mentant, il peut obtenir

Un **faux** théorème [AEG⁺21, Theorem 3]

Théorème

Aucune règle de vote ne peut résister aux stratégies dans les cas où au moins deux affectations stables existent.

"Preuve". Considérons deux affectations stables **voisines** :



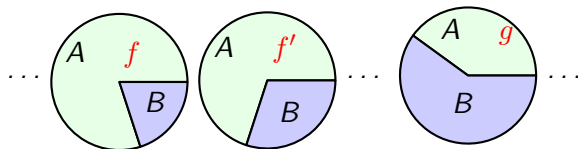
Il y aura forcément un A-électeur dans f qui préfère g . Alors en mentant, il peut obtenir f' . Mais cela n'est pas stable et donc d'autres A-électeurs doivent suivre pour obtenir g .

Un **faux** théorème [AEG⁺21, Theorem 3]

Théorème

Aucune règle de vote ne peut résister aux stratégies dans les cas où au moins deux affectations stables existent.

"Preuve". Considérons deux affectations stables **voisines** :



*Il y aura forcément un A -électeur dans f qui préfère g . Alors en mentant, il peut obtenir f' . Mais cela n'est pas stable et donc **d'autres A -électeurs doivent suivre pour obtenir g .***

La phrase en gras est fausse ! On ne peut pas toujours manipuler.

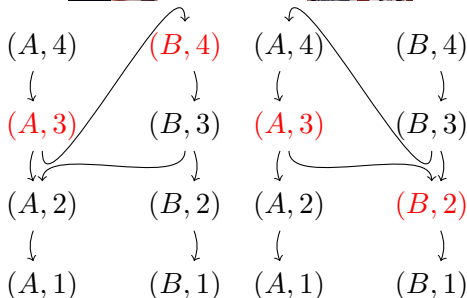
Le “théorème” a bien résisté !

Plusieurs exemples et lemmes auxiliaires semblent confirmer
[AEG⁺21, Theorem 3] ...

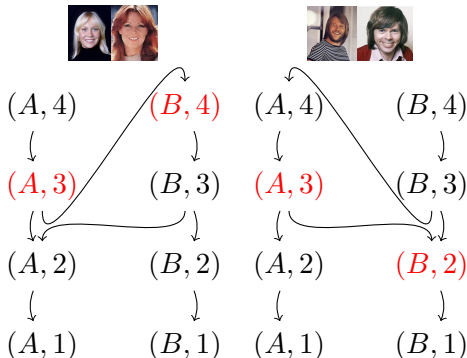
Un contre-exemple au [AEG⁺21, Théorème 3]



$\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables.



Un contre-exemple au [AEG⁺21, Théorème 3]



$\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables. Benny (sans perte de généralité) décide de manipuler en prétendant $(B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4)$; ainsi $\langle V, \emptyset \rangle$ devient instable. Pourtant, $\langle \{Ag., An., Bj.\}, \{Be\} \rangle$ est **stable par rapport au profil manipulé** :

Björn seul ne dévierait pas car $(B, 2) \not\succ_{\text{Björn}} (A, 3)$. Agnetha et Anni-Frid ne dévieront pas car $(B, 4) \not\succ_{Ag., An.} (A, 3)$.

La tentative de manipulation par Benny n'a pas fonctionné.

Pourquoi c'est un contre-exemple ?

Le théorème dit : quand il y a deux affectations stables f et g et la règle de vote choisit f , il y a forcément au moins un électeur qui préfère g , et en prétendant $(g(v), 1) \succ_v (f(v), n)$, v peut forcer que la seule affectation stable est g , que la règle doit donc choisir.

Pourquoi c'est un contre-exemple ?

Le théorème dit : quand il y a deux affectations stables f et g et la règle de vote choisit f , il y a forcément au moins un électeur qui préfère g , et en prétendant $(g(v), 1) \succ_v (f(v), n)$, v peut forcer que la seule affectation stable est g , que la règle doit donc choisir. Dans l'exemple, Benny n'arrive pas à forcer que $\langle \emptyset, V \rangle$ soit la seule affectation stable. Les électeurs finissent par $\langle \{Ag., An., Bj.\}, \{Be.\} \rangle$



Comme le choix de Benny est sans perte de généralité, **personne ne peut manipuler !**

Prouver que c'est un contre-exemple

Rien n'est infini ici, donc peut-être on devrait analyser l'exemple avec une approche de model checking.

Prouver que c'est un contre-exemple

Rien n'est infini ici, donc peut-être on devrait analyser l'exemple avec une approche de model checking.

Pourtant j'ai prouvé que c'est un contre-exemple en utilisant Isabelle, et c'était plutôt difficile ...

Approche de preuve en Isabelle

Je pars des vraies préférences de tous : $\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables.
Je choisis, **sans perte de généralité**, Benny comme manipulateur.

Approche de preuve en Isabelle

Je pars des vraies préférences de tous : $\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables.
Je choisis, **sans perte de généralité**, Benny comme manipulateur.
J'ai deux lemmes en Isabelle :

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and “les vraies préférences de Benny”
shows stable $\langle V, \emptyset \rangle$

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and $(B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4)$ (*Benny ment.*)
shows stable $\langle \{\text{Ag.}, \text{An.}, \text{Bj.}\}, \{\text{Be}\} \rangle$

Approche de preuve en Isabelle

Je pars des vraies préférences de tous : $\langle V, \emptyset \rangle$ et $\langle \emptyset, V \rangle$ sont stables.
Je choisis, **sans perte de généralité**, Benny comme manipulateur.
J'ai deux lemmes en Isabelle :

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and “les vraies préférences de Benny”
shows stable $\langle V, \emptyset \rangle$

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and $(B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4)$ (*Benny ment.*)
shows stable $\langle \{\text{Ag.}, \text{An.}, \text{Bj.}\}, \{\text{Be}\} \rangle$

Maintenant j'affaiblis **soigneusement** les hypothèses de ces deux lemmes et j'obtiens :

Approche de preuve en Isabelle (2)

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and $Aff(\text{“les vraies préférences de Benny”})$
shows $\text{stable } \langle V, \emptyset \rangle$

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and $Aff((B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4))$
shows $\text{stable } \langle \{\text{Ag.}, \text{An.}, \text{Bj.}\}, \{\text{Be}\} \rangle$

Approche de preuve en Isabelle (2)

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and $Aff(\text{“les vraies préférences de Benny”})$
shows stable $\langle V, \emptyset \rangle$

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
and $Aff((B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4))$
shows stable $\langle \{\text{Ag.}, \text{An.}, \text{Bj.}\}, \{\text{Be}\} \rangle$

Il s'avère que

$Aff(\text{“les vraies préférences de Benny”}) \vee Aff((B, 1) \succ_{\text{Benny}} (A, 4))$

est une tautologie ! On peut donc facilement conclure ...

Approche de preuve en Isabelle (3)

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
shows $\text{stable } \langle V, \emptyset \rangle \vee \text{stable } \langle \{Ag., An., Bj.\}, \{Be\} \rangle$

c.-à-d., peu importe ce que dit Benny, il ne peut pas empêcher qu’une affectation non-désirée soit stable !

Approche de preuve en Isabelle (3)

assumes “les vraies préférences de Agnetha, Anni-Frid et Björn”
shows $\text{stable } \langle V, \emptyset \rangle \vee \text{stable } \langle \{Ag., An., Bj.\}, \{Be\} \rangle$

c.-à-d., peu importe ce que dit Benny, il ne peut pas empêcher qu’une affectation non-désirée soit stable !

Dans ma soumission j’avais un tel lemme. Un rapporteur a écrit :

Mais ce raisonnement n’est que « méta » (càd qu’il n’est pas présent dans le code Isabelle) ?

J’ai donc **rajouté une couche** pour mettre la symétrie encore plus en évidence.

Stratégies pour une affectation unique

Quand il n'y qu'une seule affectation stable, toute règle de vote doit choisir cette affectation et donc personne ne peut manipuler. C'est presque trivial mais pourtant on l'a prouvé en Isabelle.

Stratégies et “locales”

L'utilisation des locales est très pratique pour cacher le profil de préférences, qui est omniprésent.

Mais quand on parle de la manipulation, il y a au moins **deux** profils, un vrai et un manipulé.

J'ai dû reprouver certains résultats pour un profil explicite ce qui m'a fait perdre le confort des locales, et je craignais pire !

Stratégies et “locales”

L'utilisation des locales est très pratique pour cacher le profil de préférences, qui est omniprésent.

Mais quand on parle de la manipulation, il y a au moins **deux** profils, un vrai et un manipulé.

J'ai dû reprouver certains résultats pour un profil explicite ce qui m'a fait perdre le confort des locales, et je craignais pire !

Est-ce une faiblesse fondamentale des locales, et serait-ce mieux en Rocq ? Aves les classes de type peut-être ?

Autres résultats

- ▶ Si chaque électeur est suffisamment loyal à une alternative, alors il y a une affectation stable unique.

Autres résultats

- ▶ Si chaque électeur est suffisamment loyal à une alternative, alors il y a une affectation stable unique.
- ▶ S'il existe une alternative S telle que les électeurs aiment beaucoup (S, n) , alors l'affectation $\lambda v.S$ est stable.

Discussion

- ▶ Les rapporteurs ont fait des douzaines de commentaires que j'ai pris en compte.
- ▶ Normalement on me dit plutôt "L'article ne donne aucun nouveau résultat, il prouve 'simplement' des résultats existants."

Discussion

- ▶ Les rapporteurs ont fait des douzaines de commentaires que j'ai pris en compte.
- ▶ Normalement on me dit plutôt "L'article ne donne aucun nouveau résultat, il prouve 'simplement' des résultats existants."
Ici, on a apprécié les assistants de preuve et on a exigé, de manière pédante, plus de rigueur !
- ▶ Est-ce que les locales sont une limitation dans Isabelle/HOL ?



Ben Abramowitz, Edith Elkind, Davide Grossi, Ehud Shapiro, and Nimrod Talmon.

Democratic forking : Choosing sides with social choice.

In Dimitris Fotakis and David Ríos Insua, editors, *Algorithmic Decision Theory - 7th International Conference, ADT 2021, Toulouse, France, November 3-5, 2021, Proceedings*, volume 13023 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 341–356. Springer, 2021.



Jan-Georg Smaus.

Proving the existence of stable assignments in democratic forking using Isabelle/HOL.

In Ugo de'Liguoro, Matteo Palazzo, and Luca Roversi, editors, *Proceedings of the 25th Italian Conference on Theoretical Computer Science*, volume 3811 of *CEUR Workshop Proceedings*, pages 225–240. CEUR-WS.org, 2024.

Loyauté

Un électeur (ou plutôt : sa préférence p) est **k -loyal à S** s'il préfère (S, k) à toute autre (non- S)-communauté :

definition

$loyal :: "nat \Rightarrow 'A1 \Rightarrow 'A1\ preference \Rightarrow bool"$

where $"loyal\ k\ S\ p = (\forall T. S \neq T \longrightarrow (\forall m. ((S, k), (T, m)) \in p))"$

Loyauté

Un électeur (ou plutôt : sa préférence p) est **k -loyal à S** s'il préfère (S, k) à toute autre (non- S)-communauté :

definition

$loyal :: "nat \Rightarrow 'A1 \Rightarrow 'A1\ preference \Rightarrow bool"$

where $"loyal\ k\ S\ p = (\forall T. S \neq T \longrightarrow (\forall m. ((S, k), (T, m)) \in p))"$

Exemple

Soient $\mathcal{A}l = \{A, B, C\}$ et $V = V_A \cup V_B \cup V_C$ où :

$|V_A| = 3$ et pour tout m , $(A, 2) \succ_i (B, m)$ et $(A, 2) \succ_i (C, m)$;

$|V_B| = 2$ et pour tout m , $(B, 2) \succ_i (A, m)$ et $(B, 2) \succ_i (C, m)$;

$|V_C| = 2$ et pour tout m , $(C, 1) \succ_i (A, m)$ et $(C, 1) \succ_i (B, m)$.

Alors les 3 électeurs en V_A sont 2-loyaux à A ,

les 2 électeurs en V_B sont 2-loyaux à B , et

les 2 électeurs en V_C sont 1-loyaux à C .

L'affectation générique

Pour une alternative S , l'**ensemble d'électeurs générique** est l'ensemble de tous les électeurs loyaux à S :

definition

```
genVoterset :: "'Al  $\Rightarrow$  'V set"  
  where "genVoterset  $S = \{v. \exists k. \text{loyal } k \ S \ (\text{preferenceProfile } v)\}$ "
```

L'affectation générique

Pour une alternative S , l'**ensemble d'électeurs générique** est l'ensemble de tous les électeurs loyaux à S :

definition

```
genVoterset :: "'Al  $\Rightarrow$  'V set"  
  where "genVoterset  $S = \{v. \exists k. \text{loyal } k \ S \ (\text{preferenceProfile } v)\}"$ 
```

L'**affectation générique** affecte chaque électeur à l'alternative à laquelle il est loyal :

definition

```
genAss :: "'V  $\Rightarrow$  'Al"  
  where "genAss  $v = (\text{THE } S. \exists k. \text{loyal } k \ S \ (\text{preferenceProfile } v))"$ 
```

Stabilité de l'affectation générique

Si tous les électeurs sont k -loyaux pour un k pas trop grand, alors l'affectation générique est l'unique affectation stable :

lemma *loyalGenericStable* :

assumes " $\forall v. \exists S k. \text{loyal } k \ S \ (\text{preferenceProfile } v)$ "

and " $\forall S. \forall v' \in (\text{genVoterset } S).$

$\text{loyal } (\text{card } (\text{genVoterset } S)) \ S \ (\text{preferenceProfile } v')$ "

shows "*stable genAss*"

lemma *loyalGenericUniqueStable* :

assumes " $\forall v. \exists S k. \text{loyal } k \ S \ (\text{preferenceProfile } v)$ "

and " $\forall S. \forall v' \in (\text{genVoterset } S).$

$\text{loyal } (\text{card } (\text{genVoterset } S)) \ S \ (\text{preferenceProfile } v')$ "

and "*stable f*"

shows " $f = \text{genAss}$ "

Contributions par rapport à [AEG⁺21]

- ▶ $|\mathcal{A}|$ peut être infini au lieu de 2.
- ▶ V peut être infini au lieu de fini.
- ▶ On ne suppose pas la totalité des préférences.
- ▶ Formalisation en Isabelle/HOL.

Cohésion

Quand est-ce que les électeurs arrivent à se mettre d'accord sur la même alternative, c.-à-d., quand est-ce que le profil de préférences est **cohésif**?

definition

```
isCohesive :: "bool"  
where "isCohesive = ( $\exists f. \text{stable } f \wedge (\exists S. \forall v. f \ v = S)$ )"
```

Cohésion

Quand est-ce que les électeurs arrivent à se mettre d'accord sur la même alternative, c.-à-d., quand est-ce que le profil de préférences est **cohésif**?

definition

```
isCohesive :: "bool"  
where "isCohesive = ( $\exists f. \text{stable } f \wedge (\exists S. \forall v. f \ v = S)$ )"
```

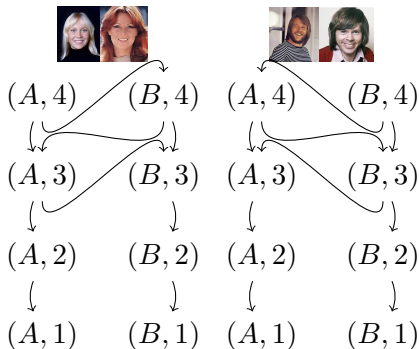
Comment reconnaître un profil cohésif?

On appelle S **consensuelle** si pour toute $S' \neq S$, il y a moins que j électeurs qui préfèrent (S', j) à (S, n) :

definition

```
consensual :: "'Al  $\Rightarrow$  bool"  
where "consensual S =  
      ( $\forall j > 0. \forall S' \neq S. \text{card } \{v. (S', j) \succ_v (S, \text{card } (\text{UNIV}::'V \text{ set}))\} < j$ )"
```

Exemple (voir ci-dessus)



On a

$$\#\{v_i \mid (B, 1) \succ_i (A, 4)\} = 0 < 1$$

$$\#\{v_i \mid (B, 2) \succ_i (A, 4)\} = 0 < 2$$

$$\#\{v_i \mid (B, 3) \succ_i (A, 4)\} = 0 < 3$$

$$\#\{v_i \mid (B, 4) \succ_i (A, 4)\} = 2 < 4$$

et donc A est consensuelle.

Par symétrie, B est aussi consensuelle.

La consensualité caractérise la cohésion

```
lemma exConsensualImpCohesive :  
  assumes " $\exists S. \text{consensual } S$ "  
  shows " $\text{isCohesive}$ "
```

```
lemma cohesiveImpExConsensual :  
  assumes " $\text{isCohesive}$ "  
  shows " $\exists S. \text{consensual } S$ "
```

La consensualité caractérise la cohésion

```
lemma exConsensualImpCohesive :  
  assumes " $\exists S. \text{consensual } S$ "  
  shows " $\text{isCohesive}$ "
```

```
lemma cohesiveImpExConsensual :  
  assumes " $\text{isCohesive}$ "  
  shows " $\exists S. \text{consensual } S$ "
```

Contributions par rapport à [AEG⁺21] :

- ▶ $|\mathcal{A}|$ peut être infini au lieu de 2.
- ▶ On ne suppose pas la totalité des préférences.
- ▶ Consensualité est **suffisante**.
- ▶ Formalisation en Isabelle/HOL.

Contre-exemple prouvé en Isabelle

```
lemma counterexampleToThm3 :  
  assumes ... AB : " $\forall s. (s=B) = (s \neq A)$ "  
  and B2split : " $B \text{Fav} = \{m, h\}$ "  
  and trAFav : " $\forall v \in \text{AFav}. \text{trueprefs } v = (((A,3) \succ_v (B,4)) \wedge (B,3) \succ_v (A,2))$ "  
  and trBFav : " $\forall v \in \text{BFav}. \text{trueprefs } v = (((B,3) \succ_v (A,4)) \wedge (A,3) \succ_v (B,2))$ "  
shows honest : " $((\forall v. \text{trueprefs } v) \longrightarrow$   
   $((\text{stable } f) = (f = (\lambda v. A) \vee f = (\lambda v. B))))$ "  
and wants : " $\text{commAss } (\lambda v. B) \ m = (B,4)$ "  
and mayget : " $(\forall v \in \text{AFav} \cup \{h\}. \text{trueprefs } v) \longrightarrow$   
   $(\text{stable } (\lambda v. A) \vee \text{stable } (\lambda v. \text{if } v=m \text{ then } B \text{ else } A)) \wedge$   
   $\text{commAss } (\lambda v. A) \ m = (A,4) \wedge$   
   $\text{commAss } (\lambda v. \text{if } v=m \text{ then } B \text{ else } A) \ m = (B,1)$ "
```

C'est compliqué mais ça met la symétrie en évidence.